目　　录

第一章　绪　　论

§1　什么是“计算几何”？它是从哪里产生的？

在造船工业、航空工业和汽车制造工业中经常遇到几何外形设计问题．比方说，当设计者对于船体的肋骨线进行设计时，他必须根据平面上若干个点画出一条曲线进行贴近拟合；当制造汽车时，先做一个手塑粘土模型，然后把模型的各块曲面分成曲线网进行设计，如此等等．“计算几何”这个术语最初是由 Minsky 和 Papert (1969) 作为模型识别的代用词被提出来的，到了 A.R. Forrest (1972) 才有了正式的定义：“对几何外形信息的计算机表示、分析和综合”．几何外形信息是指那些确定某些几何外形如平面曲线或空间曲面的型值点或特征多角形，船体数学放样中所用的样条曲线在各端点的几阶函数导数值就是样条曲线的信息．我们按照这些信息作出数学模型(如曲线的方程)，通过电子计算机进行计算，求得足够多的信息(如曲线上许许多多的点)，就是所谓计算机表示，然后对它们进行分析和综合(如：研究曲线段上会不会出现二重点或尖点，有没有多余的拐点，等等)．这个研究内容形成了计算几何．因此，它同所谓“CAGD”(Computer Aided Geometrical Design) 即“计算机辅助几何设计”有密切关系．它是一门新

兴学科——由函数逼近论、微分几何、代数几何、计算数学特别是数控(NC)等形成的边缘学科.

§2 曲线和曲面的拟合和光顺问题

在计算几何中研究的对象是曲线(主要是平面曲线)和曲面.一般为了便于设计几何外形,我们通常把曲面分成若干小块,使块与块之间的边界都是平面曲线而且每块的四周边界在 xy 平面上形成一个矩形. 这样,除了曲面块在各条边界线和各角落的接触和光滑问题而外,我们研究的对象基本上集中到平面曲线的拟合和光顺问题. 因此,插值和逼近技巧经常被我们利用到曲线和曲面去. 举个例子来说:在 xy 正交坐标系下,给定若干个型值点时,通过这些点引一条曲线,使我们从这曲线的方程可以算出曲线上型值点以外的点,这就是插值. 另一个方法是,引一条曲线,它不一定要通过型值点,但是要使它上面对应于各型值点的纵标与型值点纵标的差方和变为极小. 这就是最小二乘方的逼近法. 当然,此外还有其他逼近法.

然而,几何外形的各种性质却不同于函数的性质,而且一些常用的函数插值和逼近技巧未必都是适用的. 比方说,外形是与坐标系的选取无关的东西,就是说,无论我们怎样选取坐标系的位置,几何外形(例如:曲线的形状包括弯曲、奇点、拐点等)总是不会改变的. 然而把曲线和曲面表示出来的函数——例如在 xy 坐标系下,用 $y=f(x)$ 这个函数来表示,恰恰要牵涉到坐标系的选取,就是说,不同的坐标系有不同的函数表示. 不但如此,即使在选好的坐标系下,能不能用计算机算出曲线上许许多多点的坐标 y 来,还是一个问题. 这里就产生了贴近拟合技巧,用简单的函数例如 x 的 n 次多项式代替一般函数 $f(x)$. 这样,我们才能通过计算机而按需要算出足够多的点来. 然后,用绘图机画出一条曲线 C_n 作

为所要的几何外形. 有时，给定了一个特殊外形，例如一条圆弧. 在这种场合，我们当然可以利用方便的拟合技巧，但是一般地说来，我们要求的是一种在允许的范围内可以接受的贴近拟合，它既保持着曲线或曲面的本性而又是光滑的或光顺的. “光滑”，就曲线说来，是指切线方向的连续性，或者更精密地指曲线曲率的连续性. “光顺”是指曲线的拐点不能太多，拐来拐去，就不顺眼了. 怎么办？我们先就小挠度曲线的拟合和光顺问题进行分析和综合工作.

所谓“小挠度曲线”是指所论的曲线段在各点的斜率(即切线和 x 轴的交角的正切)的绝对值小于1的情况. 此时，曲线 $y=y(x)$ 在点 (x, y) 的曲率半径 $R(x)$ 是由 $1/y''(x)$ 来代替——这件事成了样条曲线论的基础. 多年来，设计者为了在特定的两点间放样一条光滑的曲线，通常使用细长木条或塑料长薄条，称样条，它的作用相当于“万能”曲线板. 这些薄条或样条上各处加若干个“鸭铁”即铅压铁，使样条通过那些特定点. 如果把设计者的样条看作薄梁，那末 Bernoulli–Euler 法则

$$M(x)=EI[1/R(x)]$$

成立. 式中 $M(x)$ 是弯矩，E 是扬氏模数，I 是几何惯性矩，而且 $R(x)$ 是弹性曲线(即梁的变形轴形成的曲线)的曲率半径. 在小挠度的场合，我们有

$$y''(x)=(1/EI)M(x).$$

然而各鸭铁实质上是起着简单支点的作用，所以 $M(x)$ 在两鸭铁位置之间的变化是线性的. 因此，我们在每相邻两型值之间得到三次曲线段 C_3. 如果把这样 n 段 C_3 连接起来，使两相邻曲线在连接处(叫节点)的斜率和曲率各各相等，那末我们获得 n 段 C_3 合并成的整条曲线，就是三次样条曲线 (Spline). 这方法同上述最小二乘方法不一样，是所谓“点点通过”的方法.

§3 大挠度曲线的拟合和光顺问题

前节所述的方法不适用于大挠度曲线的场合，比如：船艏型线就是一例．这时，如果我们仍须沿用三次样条曲线进行拟合，那末势必对于每个分段采用各一个坐标系，从而必须把一个坐标系变换到邻接的坐标系去，这样做非常复杂费力．在这样的情况下，我们采用参数样条曲线来代替前节的所谓"简单"样条曲线．举例来说，把曲线段的参数方程写成参数 t 的三次多项式：

$$(E_3)\qquad \begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \frac{1}{2!} a_2 t^2 + \frac{1}{3!} a_3 t^3, \\ y &= b_0 + b_1 t + \frac{1}{2!} b_2 t^2 + \frac{1}{3!} b_3 t^3. \end{aligned}$$

式中，我们不妨假定 $0 \leqq t \leqq 1$，因为在两端点的参数值分别为 t_1 和 t_2 的一般情况下 $(t_1 < t_2)$ 只须作参数变换

$$t \to \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

就可达到目的．

容易看出：要确定各系数 a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$，我们仅须预先定下 $x(0)$, $x'(0)$; $x(1)$, $x'(1)$; 以及 y 的对应值就够了．此地顺便指出，当曲线 (E_3) 在两端点的切线方向被预先给定时，我们在选取 $x'(j)$, $y'(j)$ $(j = 0, 1)$ 中还允许有下列的变换：

$$(T)\qquad \begin{aligned} &x'(0) \to \lambda x'(0), \\ &y'(0) \to \lambda y'(0); \end{aligned} \quad (\lambda > 0) \qquad \begin{aligned} &x'(1) \to \mu x'(1), \\ &y'(1) \to \mu y'(1). \end{aligned} \quad (\mu > 0)$$

参数方程 (E_3) 表示了一条三次代数曲线，因为它同直线 $ax + by + c = 0$ 相交于三点（包括虚点）．它具有一个奇点（二重点或尖点），就是特征．在拟合中必须注意奇点会不会在所论的一段曲线

上出现的问题．如果奇点出现，我们就要适当采取变换 (T) 中的参数偶 (λ, μ)，以改变我们的拟合，使二重点或尖点不在 $0 \leqq t \leqq 1$ 区间里就可以．这相当于调整曲线段在各端点的切线向量长度．

另一方面，我们还要检查这个曲线段有没有拐点．为此，首先对 (E_3) 中的参数 t 的取值不加任何限制，因而所考察的不是曲线段而是整根曲线，然后再对各种插值曲线段进行拐点的检查．实际上，曲线的拐点方程是

$$pt^2 - 2qt + 2r = 0,$$

式中 $(p, q, r) = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$．

显然，这个方程对于仿射变换是不变的，所以各系数之比都是仿射不变量．但是，p, q 和 r 对于参数 t 的线性变换

$$t = c\bar{t} + f \qquad (c \neq 0)$$

都要改变．从此导出：在 $p \neq 0$ 的假定下①，

$$I = \left(\frac{q}{p}\right)^2 - 2\frac{r}{p}$$

是权为 -2 的相对不变量，它的重要性在于：

1．当 $I > 0$ 时，曲线有两个实拐点；

2．当 $I = 0$ 时，曲线上出现一个尖点；

3．当 $I < 0$ 时，曲线上出现一个二重点．

在第 1 种即 $I > 0$ 的情况下，整条曲线固然要有两个实拐点，但是这两拐点不一定在所论曲线段上出现．这里分为两种场合．首先假定曲线段在两端点的曲率是异符号．那末，曲线上不可避免地要出现一个拐点．例如船艏型线的上段就是这样．其次，假定曲线段在两端点的曲率是同符号．在 p, q, r 满足某些条件下，曲线段就有两个实拐点，我们称之为多余的拐点．

为了实现光顺的目的，我们必须找出一种消除多余拐点的插值法．为此，在不改变曲线段在两端点的切线方向的条件下，把各

---

① 如果 $p = 0$，曲线变为"简单"样条曲线。

切线向量模分别改为 λ 倍和 μ 倍 $(\lambda, \mu>0)$. 在 (λ, μ) 平面第一象限里，我们找到了一个矩形区域 R 即所谓正则区域，使对于 R 的点 (λ, μ) 所作的三次参数样条曲线段，既无多余的拐点，又无尖点和二重点.

§ 4 Bézier 曲线及其拓广

S. A. Coons、穗坂衛等作出的曲线和曲面的合成理论在实际中得到应用，但是要在连接合成中把全部连接条件规定下来，必然会引起错综复杂的情况. P. Bézier(1968) 因此设计出一种方法，使我们用一个式子表达全体的同时，还能容易进行外形控制.

Bézier 曲线是用了所谓特征多角形 $P_0P_1\cdots P_n$ 的折线$\{P_i\}$，使曲线在两端同折线两端直线段相切，而中间的形状则是作为各折线向量加权的向量总和的轨迹被表达成的. 已经明确，Bézier 曲线 $X(s)=[x(s), y(s)]$ 是以多角形顶点为样板点 (sample point) 的 Bernstein 逼近:

$$B_n[X(s)]=\sum_{\nu=0}^{n} X\left(\frac{\nu}{n}\right)\phi_\nu(s),\ 0\leqq s\leqq 1,$$

其中权函数 ϕ_ν 对于固定的 s 是表示与一个固定概率有关的离散二项概率密度函数:

$$\phi_\nu(s)=\binom{n}{\nu}s^\nu(1-s)^{n-\nu},\ \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

多项式 $B_n[X(s)]$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 $X(s)$. 这里样板点是指

$$\left(\frac{\nu}{n},\ X\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

Bézier 在法国雷诺汽车制造公司发展了他的方法，从一块小粘土模型或一根手绘的曲线取来的数据以原尺寸被设计到放样机上. 然后，设计者从图上估计一根逼近曲线的一些参数，而且把曲线用机器绘下来. 对于三维空间的曲线则是在两平面投影中逐步

加以逼近的．一个可采用的逼近，一般只需经过曲线参数的调整便可在很少次数重复中收到成效．

A. R. Forrest、W. J. Gordon 和 R. F. Riesenfeld (1972, 1974) 通过 Bézier 多项式互相作用的插值与逼近，把 Bézier 曲线一般化．穗坂衛、黑田满 (1976) 改进了 Bézier 曲线，采用了分段逼近法，并指出了 Bézier 曲线和 B-样条间的关系．在英国剑桥大学专门成立了一个叫 CAD Group 的研究小组，搞这门研究．

§5　双三次样条函数及其在曲面光顺中的应用

现今在计算机辅助设计中广泛应用于描述曲面的方法，都是一种用四边曲面片的阵列来表示曲面的方式．这些曲面片的界限曲线是由 u 或 w 的分段参数方程定义的，而会合在曲面片各角落处的界限曲线的端点就是在参数取整数值的地方．各片的形状是用适当的混合函数加以描述，使得曲面片具有边界并和相邻的曲面片一起满足一定的连续条件．Coons (1964、1967) 和 Forrest (1968) 发展了混合函数的理论，而且发现：许多实际应用的曲面仅需要两个混合函数和一个三次基本向量就足够表示．

将三次样条函数从一元推广到二元的第一个真正成功的工作是由 Carl deBoor 作出的 (1962)，这就是所谓双三次样条函数，它是在矩形区域的矩形网格上被定义的，后来 J. G. Hayes 和 J. Halliday (1972) 把它用到任意数据集的拟合方面的工作中．对双三次样条函数的一些基本性质，现在虽已有了很多的认识，但是从另一个角度考察这些函数有关间断量的某些性质，这对于我们根据实际情况提出曲面拟合和光顺的一种算法是有益的．

利用双三次样条函数作曲面拟合，需要给出边界条件，而这往往是有困难的．忻元龙 (1977) 针对这种情况，提出用光顺性条件代替边界条件的一种算法，并且证明解的存在唯一性．他对于曲

面光顺还提出一种“曲线检查、曲面修改”的方案，修改点和修改量可由光顺条件确定．这种光顺方案已经在船体数学放样中获得了成功的应用．

§6 高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量

上述§3的三次参数曲线有一个重要的仿射不变量 I，用以判别曲线有没有实拐点和奇点．我们曾把这个结果推广到五次参数曲线去(苏步青，1977)．一般地用方程

$$(E_n)\qquad x=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}a_it^i,\quad y=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}b_it^i$$

表示平面 n 次参数曲线，它是有理整曲线．从它和一条直线 $\lambda x+\mu y+\nu=0$ 一般有 n 个交点(包括虚交点)的事实，我们便可断定：这种曲线一定是 n 次代数曲线 C_n，其亏格

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r$$

为0，其中 d 和 r 分别表示 C_n 的二重点和尖点个数．C_n 一般有 $2(n-2)$ 个拐点(虚拐点也算在内)．

令 $\qquad p_{i,j}=a_ib_j-a_jb_i\quad(i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

当 $n=5$ 时，由方程 (E_5) 表示的五次代数曲线 C_5 一般有六个拐点和六个奇点，这对于曲线的光顺是不利的．要使拐点个数尽可能减少，又要使曲线不成为简单五次曲线，我们假定：

$$p_{35}=0,\ p_{45}=0,\ p_{25}\neq0.$$

在这些条件下，我们找到了三个(关于线性参数变换的权分别为 -1，-2，-4 的)相对仿射不变量 a，b，g．因此，在 $a\neq0$ 的假定下，我们得出两个内在的仿射不变量：$b/(a)^2$，$g/(a)^4$．按照 $g\gtreqless0$ 和 $b\gtreqless0$，以及 $g>0$，$b>2\sqrt{g}$ 或 $b<-2\sqrt{g}$ 等八种场合，

我们算出了实奇点的个数.

这个结果可以推广到平面上满足 h 个条件

$$p_{r,n}=0 \quad (r=n-h,\ n-h+1,\ \cdots,\ n-1),$$
$$p_{n-h-1,n}\neq 0$$

(其中 $0\leqq h\leqq n-3$)的 n 次参数曲线去，从此得出 $2n-h-4$ 个(当 $n>3,\ h>0$)或 $2n-5$ 个(当 $n=3$ 或 $n>3,\ h=0$)相对仿射不变量.

在高维仿射空间，我们获得更一般的结果(苏步青、忻元龙，1980)：

m 维仿射空间 $n(>m>2)$ 次参数曲线一般有 $m(n-m)-2$ 个内在仿射不变量.

第二章 样条函数

§1 三次样条函数

样条函数的理论和应用是从三次样条函数开始发展起来的. 在计算几何中，应用得最早、研究得最详细的也是三次样条函数. 这是因为：(1) 它是次数最低的 C^2 类样条，这里二阶连续是大多数工程和数学物理问题所需要的，次数低则带来计算的简便和稳定；(2) 它是放样工艺中绘制曲线用的木样条的数学模型的线性近似，因此在小挠度情况下，和木样条画的曲线很相近，符合传统的光顺性要求. 此外，三次样条函数在数学上具有很强的收敛性质，使得它在数值微分和积分，以及微分、积分方程的数值求解方面有着广泛的应用.

今天，计算几何的兴起使得样条曲线向着几何化和非线性方向深入展开，手段也日益丰富深刻. 尽管如此，三次样条函数仍不失为一个基本的和入门的工具. 计算几何中相当一部分常用的曲线，例如三次参数样条曲线，三次 B 样条曲线，张力样条曲线和几何样条曲线等，都可以看成在三次样条函数基础上的某种改型.

工程中和数学上经常提出这样一种叫做插值的数据处理问题：在平面上给定一组离散的有序点列，要画一条光滑曲线把这些

点按次序连结起来. 长期以来, 绘图员常常用一根富有弹性的均匀细木条或有机玻璃条, 让它依次经过这列点, 并在每一点处用“压铁”压住, 最后沿着这根称为“样条”的细木条画出一根光滑曲线.

如果把木样条看成弹性细梁, 压铁看成作用在梁上的集中载荷, 那么按上述方法画出的光滑曲线, 在力学上可以模拟为求弹性细梁在外加集中载荷作用下的弯曲变形曲线. 在建立平面直角坐标系后, 由材料力学知道梁的变形曲线微分方程是

$$EIk(x)=M(x), \tag{1.1}$$

其中 EI 代表细梁的刚度系数, 对于均匀木样条来说是一个常数. 由于梁在两个压铁之间再无外力作用, 弯矩 $M(x)$ 是 x 的线性函数. 变形曲线 $y=y(x)$ 的曲率 $k(x)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. (1.1)是非线性常微分方程, 其解不能用初等函数表示①. 在细梁的弯曲不大, 即 $|y'|\ll 1$, 通常称为“小挠度”情况下, 可以忽略 y' 的影响, 得到(1.1) 的线性化近似方程式 $EIy''=M(x)$, 即 $y^{(4)}=0$. 这时变形曲线 $y=y(x)$ 为分段三次多项式, 且在压铁处的函数值(位移)、一阶导数(转角)和二阶导数(弯矩)都是连续的, 而三阶导数(剪力)则有间断. 这些就是三次样条函数的力学背景. 现在着手从数学上来表示和研究它.

1.1 插值三次样条函数

定义 1 设在区间$[a, b]$上给定一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $[a, b]$ 上的一个函数 $s(x)$ 称为**三次样条函数**, 如果它满足下列条件:

(1) 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 内 $s(x)$ 是三次多项式;

---

① 在几何样条曲线这一节, 将讨论(1.1)的精确解.

(2) 在整个区间 $[a, b]$ 上，$s(x)$ 为二阶连续可导函数，即在点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 处成立

$$s^{(k)}(x_i-0)=s^{(k)}(x_i+0), \quad k=0, 1, 2.$$

$x_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 称为 $s(x)$ 的节点.

在给定一组有序数列 $y_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 后，如果 $s(x)$ 再满足条件

(3) $s(x_i)=y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n)$,

则称 $s(x)$ 为**插值三次样条函数**.

我们将利用节点处的函数值和二阶导数，或者函数值和一阶导数来建立插值三次样条函数的表示式及连续性方程，并且讨论边界条件的给定，而最后给出算法.

1° 表示式和连续性方程

(1) 按照函数值及二阶导数决定的表示式和 M 连续性方程.

记 $s(x)$ 在节点 x_i 处的函数值、一阶导数和二阶导数为

$$s(x_i)=y_i,\ s'(x_i)=m_i,\ s''(x_i)=M_i \quad (i=0, 1, \cdots, n). \tag{1.2}$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，$s(x)$ 的二阶导数是线性的，所以

$$s''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i), \tag{1.3}$$

其中 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 表示小区间的长度. 将(1.3)陆续积分二次，并由插值条件(1.2)，得到

$$s'(x)=-M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6} \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i), \tag{1.4}$$

$$s(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+\left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_iM_{i-1}}{6}\right)(x_i-x)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{h_iM_i}{6}\right)(x-x_{i-1}) \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i). \tag{1.5}$$

从(1.4)得到

$$\begin{cases} s'(x_i-0)=\dfrac{h_i}{6}M_{i-1}+\dfrac{h_i}{3}M_i+\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}, \\ s'(x_i+0)=-\dfrac{h_{i+1}}{3}M_i-\dfrac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}. \end{cases} \tag{1.6}$$

由于在每个内节点 x_i 处一阶导数连续，$s'(x_i-0)=s'(x_i+0)$，所以成立

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{1.7}$$

其中

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}, \qquad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}},$$

$$d_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \tag{1.8}$$

方程组(1.7)称为插值三次样条函数 $s(x)$ 的 **M 连续性方程**，式中 λ_i 与 μ_i 表示相邻子区间长度之比，$\frac{1}{3}d_i$ 等于插值数据在 x_i 处的二阶中心差商. 连续性方程(1.7)的直观意义是：插值函数的二阶导数在 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 三点处的加权平均值$\left(权因子依次为 \frac{\mu_i}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\lambda_i}{3}\right)$等于被插数据在 x_i 处的二阶中心差商值. (1.7)在力学上反映了“三弯矩关系”.

(2) 按照函数值及一阶导数决定的表示式和 m 连续性方程.

由 Hermite 插值公式知道，在区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上，$s(x)$ 及其一、二阶导函数可以写成

$$\begin{aligned} s(x)=&m_{i-1}\frac{(x_i-x)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2}-m_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x_i-x)}{h_i^2} \\ &+y_{i-1}\frac{(x_i-x)^2[2(x-x_{i-1})+h_i]}{h_i^3} \\ &+y_i\frac{(x-x_{i-1})^2[2(x_i-x)+h_i]}{h_i^3}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$s'(x)=m_{i-1}\frac{(x_i-x)(2x_{i-1}+x_i-3x)}{h_i^2}$$

$$-m_i\frac{(x-x_{i-1})(2x_i+x_{i-1}-3x)}{h_i^2}$$

$$+6\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^3}(x_i-x)(x-x_{i-1}). \tag{1.10}$$

$$s''(x)=2m_{i-1}\frac{3x-2x_i-x_{i-1}}{h_i^2}+2m_i\frac{3x-x_i-2x_{i-1}}{h_i^2}$$

$$+6\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^3}(x_i+x_{i-1}-2x), \tag{1.11}$$

它在 x_i 点的左、右极限分别是

$$\begin{cases} s''(x_i-0)=\dfrac{2m_{i-1}}{h_i}+\dfrac{4m_i}{h_i}-6\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}, \\ s''(x_i+0)=-\dfrac{4m_i}{h_{i+1}}-\dfrac{2m_{i+1}}{h_{i+1}}+6\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}. \end{cases}$$

由于在每个内节点 x_i 处二阶导数连续，$s''(x_i-0)=s''(x_i+0)$，于是得到

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=C_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{1.12}$$

其中 λ_i 和 μ_i 决定于(1.8)，而且

$$C_i=3\left(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}+\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right). \tag{1.13}$$

方程组(1.12)称为插值三次样条函数 $s(x)$ 的 **m 连续性方程**. 可以验算，$\frac{1}{3}C_i$ 是过三点 $(x_{i-1},\ y_{i-1})$，$(x_i,\ y_i)$，$(x_{i+1},\ y_{i+1})$ 而作的正抛物线在 $x=x_i$ 处的一阶导数值，m 连续性方程表明它等于插值函数的一阶导数在 x_{i-1}，x_i，x_{i+1} 三点处的加权平均，权因子依次是 $\frac{\lambda_i}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{\mu_i}{3}$. (1.12)在力学上反映了“三转角关系”.

2° 边界条件

连续性方程(1.7)或(1.12)，都是 $n+1$ 个未知数的 $n-1$ 个线性代数方程式. 要唯一定解，必须再附加两个方程. 一般按具体问

题的物理要求在区间 $[a, b]$ 的两端给出约束条件，称为边界条件. 例如，在 $x=a$ 一端，常用的有以下几种边界条件：

I 给定斜率 $m_0=y_0'$.

对于 M 连续性方程，由(1.4)，相当于给定关系式

$$2M_0+M_1=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right). \tag{1.14}$$

II 给定二阶导数 $M_0=y_0''$.

对于 m 连续性方程，由(1.11)，相当于给定关系式

$$2m_0+m_1=3\,\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{h_1}{2}\,y_0''. \tag{1.15}$$

特别，当 $y_0''=0$ 时是简支条件，样条曲线在 $x=a$ 端的曲率为零. 如果两端都是这样，称为**自然插值三次样条函数**.

III 给定关系式

$$2M_0+\lambda_0 M_1=d_0, \tag{1.16}$$

其中 $0\leqslant\lambda_0\leqslant1$, d_0 是一个适当的常数. 这一般用在边界的一、二阶导数事先没有规定的场合. 为简单计，通常可以取 $\lambda_0=1$, $d_0=d_1$. 相当于模仿手工放样，把木样条从边界的一端向外延伸，在适当远处加一块压铁压住，使得样条在端点附近弄得较为光顺. 若取 $\lambda_0=-2$, $d_0=0$, (1.16) 就是"抛物端边界条件".

对于 m 连续性方程，相应的关系式是

$$2m_0+\mu_0 m_1=C_0, \tag{1.17}$$

其中 $0\leqslant\mu_0\leqslant1$, C_0 是一个适当的常数，通常也可以取 $\mu_0=1$, $C_0=C_1$.

显然，边界条件 I 和 II 都可以统一在 III 的 (1.16) 和(1.17) 形式中.

在 $x=b$ 端也有相对应的三种边界条件，可以统一写成

$$\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n, \tag{1.18}$$

或者

$$\lambda_n m_{n-1}+2m_n=C_n. \tag{1.19}$$

把附加的两个边界条件和连续性方程合在一起，得到完整的连续性方程，写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \mathbf{0} & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & \mathbf{0} & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

或者

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_0 & & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \mathbf{0} & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & \\ & \mathbf{0} & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}. \tag{1.21}$$

这两个系数矩阵除了主三对角元素外，其余元素都为零.

以上讨论的是非周期边界条件. 在插值一条用极坐标 (γ, θ) 表示的封闭曲线的时候，需要用到

IV 周期边界条件.

$$y_n=y_0,\ m_n=m_0,\ M_n=M_0. \tag{1.22}$$

此时，完整的连续性方程是

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & 0 & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & 0 & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

或者

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & 0 & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & \\ & 0 & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \\ C_n \end{bmatrix}, \tag{1.24}$$

式中
$$\lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1}, \quad \mu_n = \frac{h_n}{h_n + h_1}.$$

3° 算法

为了求出插值三次样条函数 $s(x)$，关键在于求解完整连续性方程组 (1.20)，(1.21)，(1.23)，(1.24). 在三对角系数矩阵中，$|\lambda_i| + |\mu_i| = 1 (i=1, 2, \cdots, n)$，并且 $0 \leqslant \lambda_0, \mu_0, \lambda_n, \mu_n \leqslant 1$，主对角线元素都等于 2，对角严格占优势，因此这些方程组的解存在并且唯一.

求解三对角方程组不必用一般的消元法，利用“追赶法”能够大大节省计算时间和存储量. 我们以 M 连续性方程 (1.20) 为例

来说明追赶法的步骤.

引进递推表示的中间参量

$$\begin{cases} q_i=\dfrac{-\lambda_i}{2+\mu_i q_{i-1}}, \\ u_i=\dfrac{d_i-\mu_i u_{i-1}}{2+\mu_i q_{i-1}}, \end{cases} \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

其中约定 $q_{-1}=0$, $u_{-1}=0$.

方程(1.20)递推表示的解是

$$\begin{cases} M_n=u_n, \\ M_i=q_i M_{i+1}+u_i \quad (i=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1,\ 0). \end{cases}$$

方程(1.21)的算法与此相仿. 至于(1.23)和(1.24)的求解, 只要稍作变换, 同样可以化成三对角方程组, 而用追赶法求解.

顺便提一下, 有些文章关心插值三次样条函数的"存在性"问题. 这是因为在那里讨论更一般的边界条件, 例如 λ_0, μ_0, λ_n, μ_n 可以大于2. 这时的三对角矩阵在首末端丧失了对角优势, 不能保证解的存在唯一. 所谓"存在性"问题, 就是讨论在什么条件之下, 系数行列式不等于零. 最近的一个充分条件是: 当

$$\lambda_0<4\left(1+\frac{3h_2}{4h_1}\right),\ \ \mu_n<4\left(1+\frac{3h_{n-1}}{4h_n}\right)$$

时, (1.20)的解存在且唯一(孙家昶 [4], 1978). 关于(1.21)有相应的条件. 就目前来看, 计算几何中不至于遇到 λ_0 和 μ_n 取大值的情况. 在下面基样条一节中将会看到, 实用上, 边界条件只影响样条在端点附近的两、三段, 而对中部的影响则迅速衰减. 从应用的角度来看, 关于边界条件的讨论不必过于讲究.

求解插值三次样条函数 $s(x)$ 的步骤, 归纳如下:

(1) 根据具体问题的要求, 确定适当的边界条件;

(2) 用"追赶法"解方程组(1.20)或(1.21), 求出节点处的二阶导数 M_i 或一阶导数 $m_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$;

(3) 将 M_i 或 m_i 代回 $s(x)$ 的分段表示式(1.5)或(1.9), 由

此插出 $[a, b]$ 区间上任一点处的函数值.

为了计算方便，可以把(1.5)和(1.9)写成矩阵形式:

$$s(x)=[1,\ (x-x_{i-1}),\ (x-x_{i-1})^2,\ (x-x_{i-1})^3]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}_i$$

$$(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

其中

$$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}_i=[A]_i\begin{bmatrix}y_{i-1}\\y_i\\m_{i-1}\\m_i\end{bmatrix}=[B]_i\begin{bmatrix}y_{i-1}\\y_i\\M_{i-1}\\M_i\end{bmatrix},$$

$$[A]_i=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{3}{h_i^2}&\frac{3}{h_i^2}&-\frac{2}{h_i}&-\frac{1}{h_i}\\\frac{2}{h_i^3}&-\frac{2}{h_i^3}&\frac{1}{h_i^2}&\frac{1}{h_i^2}\end{bmatrix},\tag{1.25}$$

$$[B]_i=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{h_i}&\frac{1}{h_i}&-\frac{h_i}{3}&-\frac{h_i}{6}\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{6h_i}&\frac{1}{6h_i}\end{bmatrix}.\tag{1.26}$$

以后将会看到，矩阵形式的插值三次样条函数 $s(x)$，用于双三次样条函数和 Coons 曲面片的表示，会带来很多方便.

后面几节，介绍一般三次样条函数的几种表示式，以及最重要的三条数学性质.

对于$[a, b]$区间上一个固定的分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，三次样条函数 $s(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上是

三次多项式，因此 $s(x)$ 的全体构成一个线性空间．按照定义1的条件 (1)，$s(x)$ 有 $4n$ 个自由度．而按照条件 (2)，在 $n-1$ 个内节点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 处，$s(x)$ 要满足函数值及其一、二阶导数连续三个条件，共计 $3(n-1)$ 个约束．从而自由度为

$$4n-3(n-1)=n+3.$$

因此，对于给定分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 三次样条函数 $s(x)$ 的全体构成 $n+3$ 维线性空间．这样就有选择基底的问题．对于不同的基底有不同的表示形式．最重要的是截断幂级数、基样条 (Cardinal spline) 和 B 样条 (Basic spline) 三种基底，它们各有不同的用途，下面将逐一予以介绍．

1.2 截断幂级数

本节一开始，就考察了小挠度木样条的数学模型：在相邻两块压铁之间的一段变形曲线满足微分方程 $\frac{d^4y}{dx^4}=0$．现在整体地观察小挠度木样条，它在每块压铁处受到集中载荷．设压铁点的横坐标是 x_i，集中载荷的强度（剪力跃度）为 $b_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$．那末，整条变形曲线满足微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\sum_{i=1}^{n-1} b_i\delta(x-x_i).$$

积分四次得到解

$$y=\sum_{i=0}^{3} a_ix^i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{3!}(x-x_i)_+^3, \quad x\in[a, b]. \tag{1.27}$$

式中截断幂函数

$$x_+^3=\begin{cases} x^3, & \text{当 } x\geqslant 0; \\ 0, & \text{当 } x<0. \end{cases}$$

容易看出，$\{1, x, x^2, x^3, (x-x_1)_+^3, \cdots, (x-x_{n-1})_+^3\}$ 组成三次样条函数的 $n+3$ 维线性空间的基底．

(1.27)式称为三次样条函数的截断幂级数表示．它的优点是

采用了统一的解析式表示整个样条函数，给理论分析带来方便. 1960年前后，早期的船体数学放样中人们曾经用过这种表示式，但是在实用于计算时，却出现两个严重的问题，因此很快被放弃了. 后来则仅仅应用于理论探讨. 这两个问题是：(1) 当 x 离开 x_0 相当远时，函数表示式(1.27)中出现大数相减，引起计算的不稳定；(2)用于插值时，(1.27) 的系数 a_i 和 b_i 要通过求解线性代数方程组得到，而方程组的系数行列式类似于范德蒙特行列式，因此系数矩阵高度病态，使得计算结果失真.

1.3 三次基样条

从代数多项式的 Lagrange 插值公式得到启发，对三次样条函数的基底还可以这样选择：找 $n+3$ 个线性无关的三次样条函数 $\varphi_s(x)$ $(s=0, 1, \cdots, n+2)$，它们分别由下列插值条件所唯一确定：

$$\begin{cases} \varphi_i(x_j)=\delta_{ij} & (i, j=0, 1, \cdots, n), \\ \varphi_i'(x_0)=\varphi_i'(x_n)=0 & (i=0, 1, \cdots, n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x_j)=0 \quad (j=0, 1, \cdots, n), \\ \varphi_{n+1}'(x_0)=1, \\ \varphi_{n+1}'(x_n)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+2}(x_j)=0 \quad (j=0, 1, \cdots, n), \\ \varphi_{n+2}'(x_0)=0, \\ \varphi_{n+2}'(x_n)=1. \end{cases}$$

这样，第 I 型边界条件的插值问题的解可以表示成

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_i(x)+y_0'\varphi_{n+1}(x)+y_n'\varphi_{n+2}(x). \qquad (1.28)$$

对于第 II 型边界问题，只要对基函数 $\varphi_{n+1}(x)$ 和 $\varphi_{n+2}(x)$ 改造一下，将一阶导数条件改成相应的二阶导数，就一样适用.

(1.28)称为三次样条函数的基样条表示. 在给定了插值条件

后，这是一种显格式表示，不象 1.1，1.2，和下面讲的 1.4 几种形式那样需要通过求解线性代数方程组来确定三次样条函数的系数．后一种方式叫隐格式表示．

复旦大学和江南造船厂在船体数学放样的线型光顺程序中，使用三次基样条，取得了良好的效果．

基样条在研究微分方程和积分方程的数值解时有着许多应用．

为了看看基样条函数大致有什么特征，我们考察一根无限长的等距节点样条．当然，无限长样条实际上并不存在，但是它可以作为节点相当多而且分布比较均匀情况的一个近似．

设 $\varphi(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上以所有整数点作为节点的三次样条，满足插值条件

$$\varphi(j)=\delta_{0j} \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

并且 $\varphi'(x)$ 在全数轴上有界．从 1.1 的插值计算公式可以求得

$$\varphi(x)=\begin{cases}(3\lambda+2)x^3-3(\lambda+1)x^2+1, & 0\leqslant x<1,\\ 3\lambda^j[(\lambda+1)(x-j)^3-(\lambda+2)(x-j)^2+(x-j)], & \\ \qquad j\leqslant x<j+1 \quad (j=1, 2, \cdots), & \\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}$$

式中 $\lambda=\sqrt{3}-2\approx-0.268$．

注意到 $-1<\lambda<0$，可以看出基样条函数 $\varphi(x)$ 除了插值条件外，还有这样一些特点：(1) 相邻两段的函数值异号；(2) 每段内仅有一个极值点，第 $j+1$ 段的极值是第 j 段的 λ 倍；(3) 在节点处的一阶导数满足 $m_{j+1}=\lambda m_j$ $(j=1, 2, \cdots)$ 总的说来，$\varphi(x)$ 是一个逐渐衰减的波动函数，每向远处移动一节就衰减 λ 倍．我们称 λ 为衰减因子，它在样条函数中是一个相当重要的常数．

关于基函数 $\varphi_{n+1}(x)$，可以在正半数轴 $[0, +\infty)$ 上用类似的方法讨论，得到与 $\varphi(x)$ 同样的一些特征．$\varphi_{n+2}(x)$ 是同 $\varphi_{n+1}(x)$ 相对称的函数．$\varphi(x)$ 和 $\varphi_{n+1}(x)$ 的图形如图 1 和 2 所示．

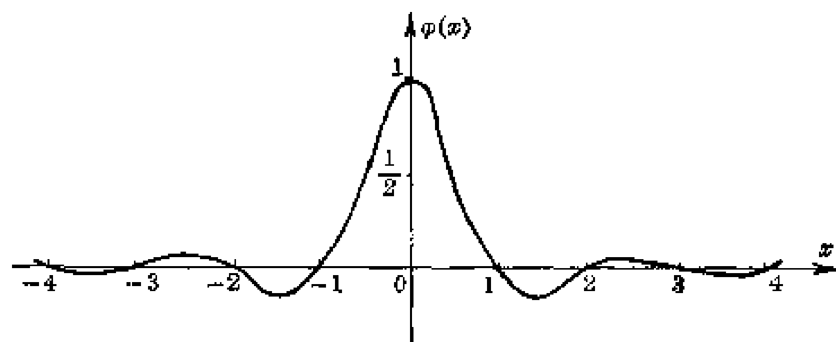


图 1

可以作这样一个试验，在这些插值点加上压铁，用木样条去撵，画出来的曲线正是图1和2的样子. 这表明，在小挠度情况，三次样条函数对于木样条模拟得相当令人满意.

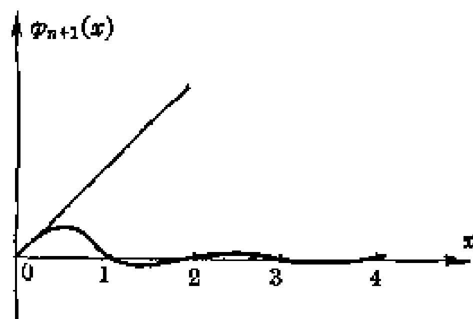


图 2

经过更细致的分析讨论后，还可以证明，有限长不等距节点的基样条函数也是逐渐衰减的波动函数. 由此可知，如果仅仅改动三次插值样条在某一节点 i 处的函数值 y_i，其它各处不变，则它对相隔 j 段后的影响将以 λ^j 的速度迅速衰减. 边界条件的变动对中间段带来的影响也是这样.

这样的性质使得误差的传播迅速衰减，并给计算带来了稳定性. 这正是高次代数多项式插值的欠缺之处. 在那里，如果对某一节点处的函数值作微小修改，说不定会在远处产生恶劣的影响. 这个毛病来源于代数多项式的解析性. 样条却通过函数光滑性的降低，换来了误差传播的衰减性质.

1.4 *B* 样 条

1946年，样条函数的创始人 I. J. Schoenberg 发表他关于样条函数的第一篇论文时，用的就是等距节点 B 样条形式. 之后，又把 B 样条推广到非等距节点和重节点的一般情形. 当初，B 样

条作为平滑统计数据的一种新方法而被提出来，自然地想到从Fourier变换的角度来定义. 发展到现在，B样条已有多达五、六种等价的定义形式，应用于越来越多的数学和工程领域. 它的数学根基是相当深刻的.

与前面几节不同，本节不限于讨论三次的情况. 为了叙述的方便，我们取截断幂函数的中心差商形式定义B样条，对自变量x在全数轴上考虑，相邻节点的间隔都等于1.

设x_+^k是截断k次幂函数. Δ在这里代表中心差分算子，对函数$f(x)$的作用是

$$\Delta f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$\Delta^k f=\Delta(\Delta^{k-1}f).$$

定义 等距节点k次B样条函数①

$$M_k(x)=\frac{1}{k!}\Delta^{k+1}x_+^k. \tag{1.29}$$

用归纳法可以证明k次B样条函数的解析表示式是

$$M_k(x)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j C_{k+1}^j\left(x+\frac{k+1}{2}-j\right)_+^k, \tag{1.30}$$

并且具有下列性质：

(1) 连续性 $k-1$阶导数连续，k阶导数间断：当k为奇数时，间断点在$x=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$；当$k$为偶数时，间断点在$x=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$；

(2) 局部性 $M_k(x)=0$，当$x\overline{\in}\left(-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right)$；

(3) 正性 $M_k(x)>0$，当$x\in\left(-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right)$；

(4) 对称性 $M_k(-x)=M_k(x)$；

(5) 归范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}M_k(x)dx=1$；

① 也称为$k+1$阶B样条函数.

(6) 权性　$\sum_{i\in I} M_k(x-i)\equiv 1$,　I 是整数全体.

前面讨论的三次样条函数的定义,可以推广成 k 次样条函数:当给定一个分割后,它在相邻两个节点之间是 k 次多项式,而且在整个定义域上函数 $k-1$ 阶连续可导.

用 Φ_k 代表定义在全数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的 k 次样条函数全体所组成的线性空间,它们的分割这样给定:当 k 为奇数时,节点取在 $x=0, \pm1, \pm2, \cdots$;当 k 为偶数时,节点取在 $x=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$.

可以证明,$\{M_k(x-i)\mid i\in I\}$ 组成线性空间 Φ_k 的基底,即对任意 $s(x)\in\Phi_k$,存在唯一的一组数列 $C_i(i\in I)$,使得

$$s(x)=\sum_{i\in I} C_i M_k(x-i).$$

这就是 Basic (基底) 名称的由来.

B 样条函数还能够从 δ 函数出发来定义. 只要注意到

$$x_+^0=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\,dt \quad 以及 \quad x_+^k=k\int_{-\infty}^{x} t_+^{k-1}dt.$$

记算子

$$C\equiv\Delta\int_{-\infty}^{x}=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}},$$

由于中心差分和积分算子可以交换,于是将(1.29)写成

$$M_k(x)=C^{k+1}\delta(x),$$

形式上更加简洁. 算子 C 中积分运算 $\int_{-\infty}^{x}$ 的作用是对函数的光滑,中心差分 Δ 的作用类似求导,即积分的逆运算. 把两者结合起来,函数 $f(x)$ 经过算子 C 作用以后,应该比 $f(x)$ 更光滑,又相象. 在函数逼近论中,Cf 叫做关于 f 的史捷克洛夫函数. 近来有人形象地称 C 为磨光算子.

k 次 B 样条函数的性质 (3) 和 (5) 意味着 $M_k(x)$ 可以作为概率分布密度函数,又称为 Polyá 频率函数. Schoenberg 本人对此研究颇多.

性质(3)和(6)说明 $M_k(x-i)$ $(i\in I)$ 组成权因子.

性质(2)和(3)表明 B 样条函数具有有限支集. 在支集内, B 样条由 $k+1$ 段的 k 次多项式连接而成, 达到 C^{k-1} 连续. 函数图形象一个光滑的山丘, 所以也有人称 $M_k(x)$ 为山顶函数.

B 样条函数的有限支集性质相当重要, 它保证了 B 样条曲线(见第四章)具有良好的局部性质, 在配备了人机交互作用系统的外形设计工作中, 它有着重要的意义.

B 样条函数作为基底用于有限元方法时, 由于这个有限支集性质, 使得刚度矩阵的带宽变窄, 是一个有效的计算工具. 作为对比, 如果把 1.3 节的基样条作为基底使用, 刚度矩阵将是满的, 这样就带来了求解的复杂性.

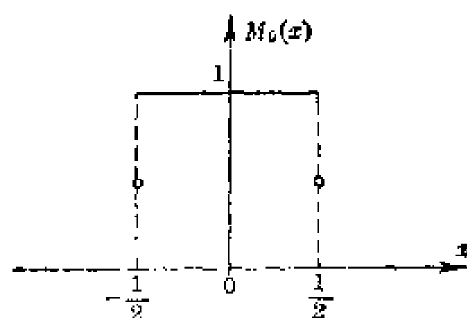
这里, 从 B 样条函数的算式 (1.30) 写出 k 取 0 到 3 次的分段表示式. 它们的图形如图 3 所示. 前面提到 B 样条函数的几条性质, 从图形上可以直观地看出来.

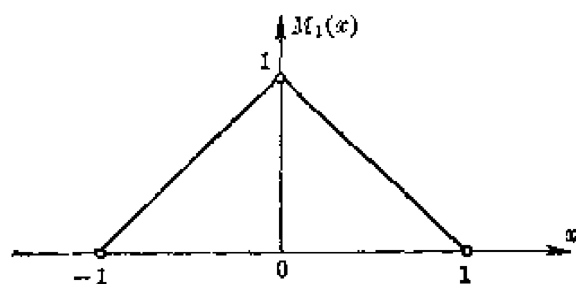
$$M_0(x)=\begin{cases}0 & \left(x>\dfrac{1}{2}\right),\\ \dfrac{1}{2} & \left(x=\dfrac{1}{2}\right),\\ 1 & \left(0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right),\\ M_0(-x) & (x<0).\end{cases}$$

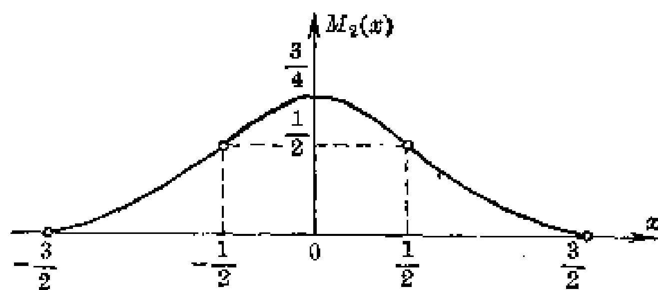
$$M_1(x)=\begin{cases}0 & (x\geqslant 1),\\ 1-x & (0\leqslant x<1),\\ M_1(-x) & (x<0).\end{cases}$$

$$M_2(x)=\begin{cases}0 & \left(x\geqslant\dfrac{3}{2}\right),\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{8} & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{3}{2}\right),\\ -x^2+\dfrac{3}{4} & \left(0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right),\\ M_2(-x) & (x<0).\end{cases}$$

$$M_3(x)=\begin{cases}0 & (x\geqslant 2),\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-2x+\dfrac{4}{3} & (1\leqslant x<2),\\ \dfrac{1}{2}x^3-x^2+\dfrac{2}{3} & (0\leqslant x<1),\\ M_3(-x) & (x<0).\end{cases}$$







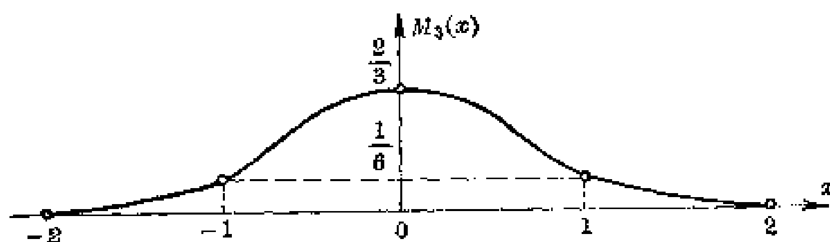


图 3

当节点分布不均匀时，情况有些不同. 由于计算几何中常用的 B 样条曲线仅限于在参数轴上取等距节点的分割，我们就不介绍非等距节点 B 样条函数了.

当定义域是有限区间，比方说 $[0, n]$，n 是某正整数时，B 样条函数同样具有基底的性质. 我们以三次 B 样条为例进行说明.

用 Φ_3 表示定义在区间 $[0, n]$ 上、以 $x=0, 1, 2, \cdots, n$ 为节点的三次样条函数全体组成的线性空间，它的维数是 $n+3$. 则这样 $n+3$ 个线性独立的 B 样条函数 $\{M_3(x-i);\ i=-1, 0, 1, 2, \cdots, n+1\}$ 构成 Φ_3 的基底(图 4). 这就是说，对于任意 $s(x)\in\Phi_3$，存在唯一的数组 $C_i(i=-1, 0, 1, 2, \cdots, n+1)$，使得

$$s(x)=\sum_{i=-1}^{n+1} C_i M_3(x-i), \quad x\in[0, n]. \tag{1.31}$$

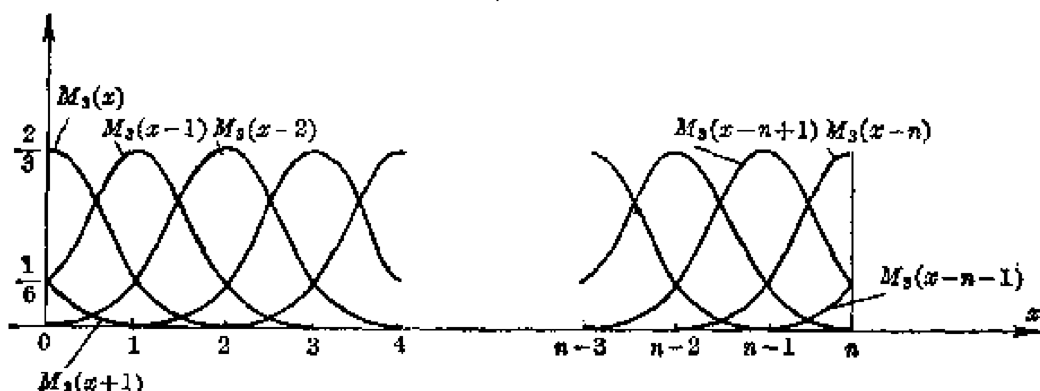


图 4

现在，应用这表示法到插值问题：已知 $n+1$ 个节点上的函数值 $s(i)=y_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 和两个适当的边界条件，来求系数 C_i. 我们注意

$$M_3(\pm 2)=0,\ M_3(\pm 1)=\frac{1}{6},\ M_3(0)=\frac{2}{3},$$

在(1.31)中取 $x=0, 1, \cdots, n$，便得到 $n+1$ 个方程

$$C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}=6y_i \quad (i=0, 1, \cdots, n),$$

再加上两个边界条件方程，就组成完整的 $n+3$ 阶线性代数方程组，

它的系数矩阵除了两端外是三对角的，由此求得 C_i. 这相当于 1.1 节中求解等距节点情况的连续性方程 (1.7) 或 (1.12). 可见，如果选取 B 样条函数作为基底用于样条插值，同样要解一个三对角方程，而实际上它们是等价的.

其实，B 样条函数的长处在于：把它作为函数逼近的工具时，具有变差缩减 (Variation Diminishing) 性质，即所谓对函数的 V. D. 逼近. 这种逼近方案具有这样的特点：(1) 精确地逼近线性函数；(2) 逼近函数与任何直线交点的个数，不超过该直线同被逼近函数的交点的个数. 这意味着，逼近函数总比被逼近函数"光顺". 比如，被逼近函数为凸，它与直线的交点个数最多是 2, 于是逼近函数与该直线的交点个数不会超过 2, 也是凸的. 这就说明，V. D. 逼近具备保凸性质. 由于计算几何中的 B 样条曲线继承了 B 样条函数的局部性和 V. D. 性，它在几何外形设计中起到强有力的作用.

1.5　三次样条函数的性质

本节将介绍插值三次样条函数最重要的几项性质，就是极小模性质、最佳逼近性质和很强的收敛性质，即不但函数本身收敛，它的某几阶导数也收敛的性质. 这表明，插值三次样条函数有着相当良好的数学特性. 以这些性质作为基础，人们成功地把三次样条函数应用到广泛的领域中去.

定理 1　极小模性质

设 $f(x)\in C^2[a, b]$ 是任一被插函数，$s(x)$ 是自然插值三次样条函数，则成立

$$\int_a^b [s''(x)]^2dx \leqslant \int_a^b [f''(x)]^2dx, \tag{1.32}$$

式中等号仅当 $f(x)\equiv s(x)$ 时成立.

证明　我们考察积分

$$\int_a^b [f''(x)-s''(x)]^2 dx$$
$$=\int_a^b [f''(x)]^2 dx-\int_a^b [s''(x)]^2 dx$$
$$-2\int_a^b [f''(x)-s''(x)]s''(x)\,dx. \qquad (1.33)$$

由插值条件以及连续两次的分部积分，上式最后一项积分是

$$\int_a^b [f''(x)-s''(x)]s''(x)dx=\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x)-s''(x)]s''(x)dx$$
$$=\sum_{i=1}^n \left\{[f'(x)-s'(x)]s''(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}-[f(x)-s(x)]s'''(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right.$$
$$\left.+\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)-s(x)]s^{(4)}(x)dx\right\}$$
$$=[f'(x)-s'(x)]s''(x)\Big|_a^b=0.$$

代入(1.33)，可见(1.32)式的成立.

从(1.33)看出：仅当 $f''(x)=s''(x)$ 时，(1.32) 式的等号才会成立. 因而 $f(x)-s(x)$ 是线性函数. 如果注意到 $f(x)$ 和 $s(x)$ 在 $n+1$ 个节点处取等值，$f(x)-s(x)$ 有 $n+1\geqslant 2$ 个零点，它必恒等于零. 证毕.

从证明的过程中看出，如果把 $s(x)$ 的自然边界条件改成 I 型边界条件，即 $s(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的边界斜率，那末极小模性质同样成立.

(1.32) 中的函数二阶导数平方的积分，在小挠度时近似等于曲率平方积分，即单位刚度弹性梁的能量. 所以极小模性质又称为曲率极小性质，在力学上就是能量极小原理：在一批点上压住若干块压铁的木样条，平衡在能量极小的位置上. 极小模性质表明，这个位置就是自然插值三次样条函数. 正是因为这样，小挠度三次样条函数的光顺性和计算的稳定性得到了保证.

定理 2 最佳逼近性质

设 $f(x)\in C^2[a, b]$ 是任一被插函数，$s_f(x)$ 是带有斜率边界

条件的插值三次样条函数，$s(x)$ 是与 $s_f(x)$ 有相同分割的任一三次样条函数，则有

$$\int_a^b [f''(x)-s_f''(x)]^2dx\leqslant\int_a^b [f''(x)-s''(x)]^2dx. \qquad (1.34)$$

证明 如前我们考察积分

$$\int_a^b [f''(x)-s''(x)]^2dx=\int_a^b [f''(x)-s_f''(x)+s_f''(x)-s''(x)]^2dx$$

$$=\int_a^b [f''(x)-s_f''(x)]^2dx+\int_a^b [s_f''(x)-s''(x)]^2dx$$

$$+2\int_a^b [f''(x)-s_f''(x)][s_f''(x)-s''(x)]dx.$$

沿用定理1中的方法，可以证明上式中最后一项积分等于零，从而(1.34)式成立. 证毕.

最佳逼近性质表明，当给定 C^2 连续的函数 $f(x)$ 时，在所有具有相同分割的三次样条函数 $s(x)$ 中，以插值三次样条函数 $s_f(x)$ 在均方差意义下对 $f(x)$ 逼近得最好. 这个性质，在插值与最佳逼近这两个一般是不同的概念之间建立了一种联系.

定理3 （**误差估计**）

已知函数 $f(x)\in C^4[a, b]$ 及 $[a, b]$ 上的一个分割 Δ，设 $s(x)$ 是关于 $f(x)$ 的带有 I 型或 II 型边界条件的插值三次样条函数，则有误差估计

$$\|(f-s)^{(r)}\|_\infty\leqslant C_r\|f^{(4)}\|_\infty h^{4-r} \quad (r=0, 1, 2, 3),$$

其中 $$C_0=\frac{5}{384},\ C_1=\frac{1}{24},\ C_2=\frac{3}{8},\ C_3=\frac{\beta+\beta^{-1}}{2},$$

$h=\max\limits_i h_i$，$\beta=\dfrac{\max\limits_i h_i}{\min\limits_i h_i}$ 是分割比，并且系数 C_0 和 C_1 是最优的估计.

这个定理是 C. A. Hall 和 W. W. Meyer 在 1976 年得出的结果，证明较长，我们不再引述. 这个定理表明了，当 $h\to 0$ 时，插值

三次样条函数 $s(x)$ 连同它的一、二、三阶导数一起，一致收敛到 $f(x)$ 及其相应的导数. 但三阶导数的收敛性则还要求分割比 β 关于分割 Δ 是一致有界这个条件. 这种很强的收敛性质是样条函数非常重要的特性.

§2 二次样条函数

在计算几何中，三次样条函数及其各种变型占有特殊重要的地位. 三次以上的样条，由于光顺性差(拐点太多，同木样条的偏差太大)和计算复杂等原因，很少使用. 在低于三次的场合，一次样条函数是由连接相邻两个型值点的弦线组成的多边形，光滑性差，也很少使用.

二次样条函数由分段的正抛物线组成，在连接处达到切线连续，适用于光滑性要求较低的课题. 它的优点是能够减少曲线的波动，并且可以直接同配备有正抛物线插补功能的绘图机或数控机床配套使用.

插值二次样条函数的提法及数学处理，与插值三次样条函数的场合十分相象. 不同之处只在于：连接点恰好选在相邻两个已知插值点的中点上. 关于这一点，我们在1.4节讨论偶次 B 样条时已经看到了. 把插值点和连接点交错分布起来的想法，多半是来自偶次 B 样条的启发.

定义 设区间 $[a, b]$ 上给定一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 和一组有序数列 $y_i(i=1, 2, \cdots, n)$, $[a, b]$ 上的一个函数 $s(x)$ 称为**插值二次样条函数**，如果它满足下列条件：

(1) 在每个小区间 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 内，$s(x)$ 是二次多项式，其中 $x_{i-\frac{1}{2}}=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$，称为半节点 $(i=1, 2, \cdots, n)$;

(2) 在整个区间 $[a, b]$ 上，$s(x)$ 是一阶连续可导函数，即在

半节点 $x_{i-\frac{1}{2}}(i=1, 2, \cdots, n)$ 处成立

$$s^{(k)}(x_{i-\frac{1}{2}}-0)=s^{(k)}(x_{i-\frac{1}{2}}+0),\ k=0,\ 1; \tag{2.1}$$

(3) $s(x_i)=y_i\quad(i=1, 2, \cdots, n)$.

现在利用节点处的函数值 $y_i=s(x_i)$ 和一阶导数 $m_i=s_i'(x)$，二阶导数 $M_i=s''(x_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 来建立插值二次样条函数的表示式及连续性方程.

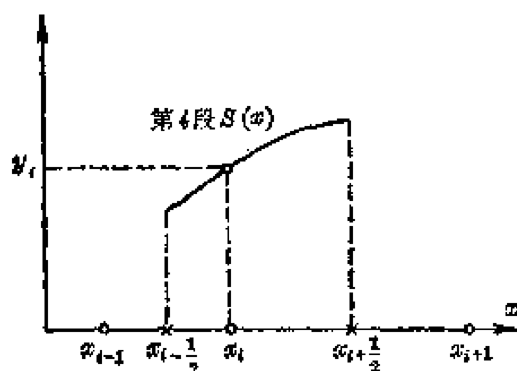


图 5

在相邻两个半节点之间的第 i 段二次多项式函数可以唯一表示成

$$s(x)=y_i+m_i(x-x_i)+\frac{1}{2}M_i(x-x_i)^2$$

$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ x\in[x_{i-\frac{1}{2}},\ x_{i+\frac{1}{2}}], \tag{2.2}$$

这里记 $x_{-\frac{1}{2}}\equiv x_0,\ x_{n+\frac{1}{2}}\equiv x_n$.

它的导函数

$$s'(x)=m_i+M_i(x-x_i). \tag{2.3}$$

于是，连续性条件(2.1)可以写成

$$\begin{cases} y_i-\frac{1}{2}m_ih_i+\frac{1}{8}M_ih_i^2=y_{i-1}+\frac{1}{2}m_{i-1}h_i+\frac{1}{8}M_{i-1}h_i^2, \\ m_i-\frac{1}{2}M_ih_i=m_{i-1}+\frac{1}{2}M_{i-1}h_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \end{cases}$$

式中 $h_i=x_i-x_{i-1}$.

从中解得

$$\begin{cases} M_{i-1}=\dfrac{4(y_i-y_{i-1})}{h_i^2}-\dfrac{3m_{i-1}+m_i}{h_i}, \\ M_i=\dfrac{-4(y_i-y_{i-1})}{h_i^2}+\dfrac{3m_i+m_{i-1}}{h_i} \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{2.4}$$

比较两式，得到 **m 连续性方程**

$$\lambda_i m_{i-1}+3m_i+\mu_i m_{i+1}=C_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{2.5}$$

这里

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}},\quad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}},$$

$$C_i=4\left(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}+\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right).$$

类似地，我们有 **M 连续性方程**

$$\mu_i M_{i-1}+3M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{2.6}$$

式中

$$d_i=\frac{8}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right).$$

仿照三次样条函数的处理，添上相应的三型边界条件，我们就构成完整的连续性方程，而且同样使用追赶法求解. 由于方程组系数矩阵对角严格占优，解是唯一存在的.

二次样条函数和三次样条函数有着许多相似的地方：

(1) 有同样的三型边界条件；

(2) 连续性方程的系数矩阵也是三对角，只是主对角元数值增加为 3，右端项扩大 4/3 倍. 在下一节将会看到，主对角元数值增加，带来了对样条的保凸性质的改善；

(3) 等距分割时，插值数据误差传播以 λ^j 速度衰减，这里

$$\lambda=-3+2\sqrt{2}\approx-0.172.$$

最后说明一下，插值二次样条函数的连接点为什么选在半节点处，同插值节点错开？这是不是自找麻烦？

假如我们取内节点 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 作为连接点，那末二次样条函数的每段便可表示成

$$s(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_{i-1})(x-x_i),\ x\in[x_{i-1},\ x_i]$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \qquad (2.7)$$

这里插值条件是

$$s(x_i)=y_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

在附加单侧边界条件 $s'(x_0)=y'_0$ 后，样条函数就被唯一确定下来。事实上，(2.7) 的系数

$$\begin{cases} a_i=y_i, \\ b_i=\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}. \end{cases} \qquad (2.8)$$

注意在每个内节点 x_i 处一阶导数必须连续：$s'(x_i-0)=s'(x_i+0)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，而且要有边界条件 $s'(x_0)=y'_0$，我们便得到递推关系式

$$\begin{cases} c_{i+1}=-\dfrac{h_i}{h_{i+1}}c_i+\dfrac{1}{h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right) \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \\ c_1=\dfrac{\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-y'_0}{h_1}. \end{cases} \qquad (2.9)$$

从(2.8)和(2.9)，唯一决定了(2.7)的全部系数 $a_i,\ b_i,\ c_i$.

这种连接方案的边界条件只有一个 $s'(x_0)=y'_0$. 而且从(2.9)看到，在等距时，初点边界导数 y'_0 的误差 $\Delta y'_0$ 将等幅传播到最后一段. 中间每个插值数据 y_i 的误差传播也是如此. 这样一来，样条函数误差衰减传播这个优点给丢掉了，这自然是我们所不希望的.

举一个数值例子. 在区间 [0, 5] 上给定节点 $x_i=i$ 和相应的插值数据 $y_i=0\,(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$.

先用前一种方法构造二次样条函数，取边界条件 $y'_0=1,\ y'_5=-1$. 这样得到的二次样条函数从边界向中央迅速衰减(如图 6 实线所示). 再用后一种方法构造，取左端一个边界条件为 $y'_0=1$，从(2.8)和(2.9)解得 $a_i=b_i=0,\ C_i=(-1)^i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$. 这是一条等幅振荡的抛物线样条(如图 6 虚线所示).

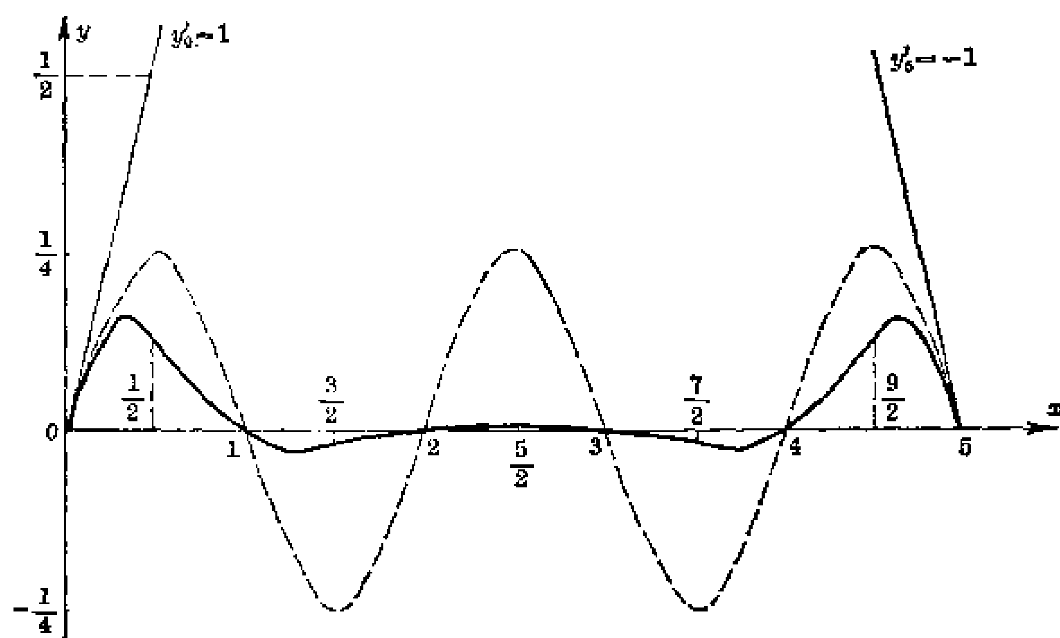


图 6

经过这里的分析，也有助于看出，为什么插值三次样条函数的两个边界条件分取在区间的两端．如果集中于一端，取为 y_0' 和 y_0''，这相当于已知 m_0 和 m_1，从 m 连续性方程(1.12)可以递推地解出

$$m_{i+1}=\frac{1}{\mu_i}(c_i-\lambda_i m_{i-1}-2m_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

岂不省力？不过，这样一来，也会带来误差等幅传播这个毛病．

§3　张力样条函数和保凸性质

在数学放样和平面数据拟合问题中，当小挠度假定适用时，插值三次样条函数是最常用的有效工具．但是，如果给定的型值点不够光顺，会出现图 7 的现象：型值点是凸的(即连接相邻型值点的弦构成凸多边形)，插值三次样条上却有多余的拐点，以致型值点的凸性得不到保持．这个例子拿到样台上用木样条摹，情况也是相同．可见现在的毛病不在数学模型上，木样条固有的脾气就是这么倔强．

我们希望有一种保凸的插值方法，以消除可能出现的多余拐

点．首先从改造木样条着手，在它上面附加一些东西，然后导出数学模型，由此构造一种叫做张力样条函数的保凸插值样条．

这个想法最早在 1966 年由 Schweikert 所提出．之后，经过许多作者的努力(Späth [2]1969, [3]1971; Cline, 1974; Nielson, 1974; Pruess, 1976; Coons[3], 1977)，形成一套系统的方法，并且直到今天还在发展之中 (deBoor[6], 1980)．这方面的问题不但和几何外形设计有关，也同函数逼近论中的保单调、保凸、保形插值问题有着密切的联系 (Passow & Roulier, 1977)．

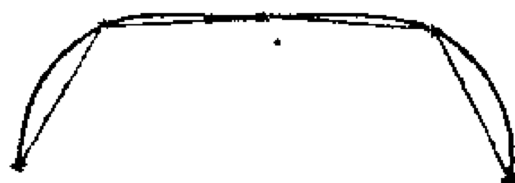


图 7

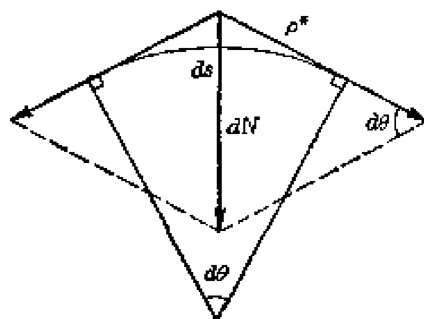


图 8

3.1 力学模型和连续性方程

在普通的木样条上沿着轴线挖一条隧道，穿进一根橡皮筋然后绷紧，让木样条带有轴向张力．绷紧的程度用张力参数标示．称这种经过改造的木样条为张力样条，它的负载平衡方程式是(见图 8)：

$$\begin{cases} EI\dfrac{d^2k}{ds^2}\cdot ds = dN, \\ dN = \rho^* d\theta, \end{cases}$$

式中 ρ^* 表示橡皮筋的张力，EI 是木样条的刚度，称 $\rho=\sqrt{\dfrac{\rho^*}{EI}}$ 为张力参数．注意到曲率 $k=\dfrac{d\theta}{ds}$，上述平衡方程式可以写成

$$\frac{d^2k}{ds^2}-\rho^2k=0, \tag{3.1}$$

它的解是关于弧长 s 的双曲函数

$$k=C_0\operatorname{ch}\rho s+C_1\operatorname{sh}\rho s, \tag{3.2}$$

C_0, C_1 是两个积分常数.

选定直角坐标系后，如同三次样条函数一样，在小挠度假定下，曲率 $k\approx y''$，弧长 $s\approx x$，负载平衡方程(3.1)近似成为

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\rho^2\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{3.3}$$

它的解是双曲函数和线性函数的迭加. (3.3)是相邻两个节点之间的一段函数所满足的微分方程. 一般地，各段的张力参数 ρ_i 不必相同. 在整个区间 $[a, b]$ 上，函数 $y(x)\in C^2[a, b]$. 下面，我们用记号 $T(x)$ 表示 $[a, b]$ 上的插值张力样条函数.

设区间 $[a, b]$ 上给定一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 及插值数据 $y_i(i=0, 1, \cdots, n)$. 记

$$h_i=x_i-x_{i-1},\ T''_i=T''(x_i),\ S_i=\operatorname{sh}\rho_ih_i,\ C_i=\operatorname{ch}\rho_ih_i.$$

方程

$$\frac{d^4T}{dx^4}-\rho_i^2\frac{d^2T}{dx^2}=0,\quad x\in[x_{i-1}, x_i]\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

的插值解为

$$\begin{aligned}T(x)=&\frac{1}{\rho_i^2S_i}[T''_{i-1}\operatorname{sh}\rho_i(x_i-x)+T''_i\operatorname{sh}\rho_i(x-x_{i-1})]\\&+\left(y_{i-1}-\frac{T''_{i-1}}{\rho_i^2}\right)\frac{x_i-x}{h_i}+\left(y_i-\frac{T''_i}{\rho_i^2}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i},\\&x\in[x_{i-1}, x_i]\ (i=1, 2, \cdots, n).\end{aligned} \tag{3.4}$$

从 $T(x)\in C^2[a, b]$，我们导得连续性方程:

$$e_iT''_{i-1}+(d_i+d_{i+1})T''_i+e_{i+1}T''_{i+1}=F_i\quad(i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{3.5}$$

式中

$$e_i=\frac{1}{\rho_i^2}\left(\frac{1}{h_i}-\frac{\rho_i}{S_i}\right),\ d_i=\frac{1}{\rho_i^2}\left(\frac{\rho_iC_i}{S_i}-\frac{1}{h_i}\right),$$

$$F_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}.$$

利用初等微积分，还容易证明系数 e_i 和 d_i 具有下列性质:

$$\begin{cases} e_i,\ d_i>0,\ \lim\limits_{\rho_i\to 0} e_i=\dfrac{h_i}{6},\ \lim\limits_{\rho_i\to 0} d_i=\dfrac{h_i}{3}, \\ 0<\dfrac{e_i}{d_i}\leqslant\dfrac{1}{2},\ \lim\limits_{\rho_i\to+\infty}\dfrac{e_i}{d_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \end{cases} \tag{3.6}$$

边界条件主要有两型:

I 给定端点切向: $T'(a)=y'(a)$, $T'(b)=y'(b)$;

II 给定端点弯曲: $T''(a)=y''(a)$, $T''(b)=y''(b)$.

其中 I 型边界条件具体写成

$$\begin{cases} d_1T''_0+e_1T''_1=\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-y'(a), \\ e_nT''_{n-1}+d_nT''_n=y'(b)-\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}. \end{cases} \tag{3.7}$$

(3.5)和(3.7)一起构成完整的连续性方程，系数矩阵也是三对角．从系数 e_i 和 d_i 所满足的性质 (3.6) 可以看出，方程的系数矩阵对角占优，方程的解存在且唯一．可以用追赶法求解．若取 $\rho_i=0$，则 $e_i=\dfrac{h_i}{6}$, $d_i=\dfrac{h_i}{3}$，这时 (3.5) 就是普通插值三次样条函数的 M 连续性方程．

3.2 保凸性条件

首先将 I 型边界条件下的连续性方程(3.5)和(3.7)改写成

$$\beta_iT''_{i-1}+T''_i+\alpha_iT''_{i+1}=\overline{F}_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n), \tag{3.8}$$

这里和以后都规定，凡足标出现 -1 或 $n+1$ 的元都等于零，式中

$$\alpha_i=\frac{e_{i+1}}{d_i+d_{i+1}},\ \beta_i=\frac{e_i}{d_i+d_{i+1}},\ \overline{F}_i=\frac{F_i}{d_i+d_{i+1}}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

$$\alpha_0=\frac{e_1}{d_1},\ \beta_n=\frac{e_n}{d_n},\ F_0=\frac{y_1-y_0}{h_1}-y'(a),$$

$$F_n=y'(b)-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n},\ \overline{F}_0=\frac{F_0}{d_1},\ \overline{F}_n=\frac{F_n}{d_n}.$$

把(3.8)写成矩阵形式

$$(I+A)T=\bar{F}, \tag{3.9}$$

式中 I 是 $(n+1)\times(n+1)$ 阶单位阵. T 和 $\bar{F}$ 分别代表由元 T_i'' 和 $\bar{F}_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 组成的 $n+1$ 维列向量, 而矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & & & & \\ \beta_1 & 0 & \ddots & & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & \beta_i & 0 & \alpha_i & \\ & & & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} \\ & \text{\Large 0} & & & \beta_n & 0 \end{bmatrix}\geqslant 0$$

矩阵 A 的非负性是因为 $\alpha_i,\ \beta_i>0$. 由(3.9)解得

$$T=(I-A^2)^{-1}[(I-A)\bar{F}], \tag{3.10}$$

其中
$$(I-A^2)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}A^{2i}>0,$$

矩阵级数的收敛性是由 $0<\alpha_i,\ \beta_i\leqslant\frac{1}{2}$ 所保证的.

张力样条函数保凸性问题的提法是: 若给定的型值点为凸, 则可选择适当的张力参数 $\rho_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 使张力样条函数为凸.

从(3.4)得到 $T(x)$ 在 $[x_{i-1},\ x_i]$ 中的二阶导数

$$T''(x)=\frac{1}{S_i}[T_{i-1}''\operatorname{sh}\rho_i(x_i-x)+T_i''\operatorname{sh}\rho_i(x-x_{i-1})].$$

注意到 $S_i>0$, 且当 $x\in[x_{i-1},\ x_i]$ 时, $\operatorname{sh}\rho_i(x_i-x)$ 和 $\operatorname{sh}\rho_i(x-x_{i-1})$ 都非负, 因此保凸性条件可以表示成为: 当给定由元 $F_i(i=0,1,\ \cdots,\ n)$ 组成的 $n+1$ 维列向量 $F>0$ 时, 能够适当选择张力参数 $\rho_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 使得 $T>0$. 于是, 从(3.10)得到保凸的一个充分条件:

$$(I-A)\bar{F}>0,$$

即

$$F_i>\alpha_{i-1}F_{i-1}+\beta_{i+1}F_{i+1}\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n). \tag{3.11}$$

这样，求保凸张力参数 ρ_i 的问题归结为：在 $\rho_i \geqslant 0 (i=1, 2, \cdots, n)$ 的条件下求解非线性不等式组(3.11)．解的存在性是由所有 $F_i>0$ 及

$$\lim_{\rho_i \to \infty} \alpha_{i-1} = \lim_{\rho_i \to \infty} \beta_i = 0$$

得到保证的．一个实用的选择保凸张力参数的方法就是运用迭代逼近技巧．例如，我们可以选择初值 $\rho_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，检查不等式组(3.11)是否成立．若在第 i 式不满足，则以适当的步长增加 ρ_i 和 ρ_{i+1} 的值，直到(3.11)全部成立为止．

当取所有的 $\rho_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，就是一般的插值三次样条函数．此时

$$e_i=\frac{h_i}{6}, \quad d_i=\frac{h_i}{3}, \quad \alpha_{i-1}=\frac{1}{2}\lambda_{i-1}, \quad \beta_{i+1}=\frac{1}{2}\mu_{i+1},$$

保凸性方程(3.11)变成

$$2F_i>\lambda_{i-1}F_{i-1}+\mu_{i+1}F_{i+1} \quad (i=0, 1, \cdots, n), \tag{3.12}$$

式中记 $\lambda_0=\mu_n=1$．

用记号 $F_i^*=\dfrac{F_i}{h_i+h_{i+1}}$ 表示插值数据 y_i 的二阶差商，则(3.12)被写成

$$F_i^*>\frac{1}{2}(\mu_i F_{i-1}^*+\lambda_i F_{i+1}^*) \quad (i=0, 1, \cdots, n). \tag{3.13}$$

这就是插值三次样条函数保凸的一个充分条件．我们在数学放样和几何外形设计中可以取它为光顺型值点的一个准则．如果希望曲线上没有拐点，那就必须在适当调整坐标系的取向之后，分两步来做：(1) 初光顺，修改型值点，使得所有 $F_i^*>0$；(2) 精光顺，再修改型值点，使得(3.12)成立．容易看出，后一步操作不会破坏第一步的结果．这套数学放样的曲线光顺方法，我们在沪东造船厂做过试验性考核，结果表明，它是一个简单而有效的判别准则．在大挠度情况下，取代型值点的二阶差商 F_i^* 的是型值点的圆率 K_i 这个几何量．这些将在第六章 § 7 介绍．

关于插值三次样条函数的保凸性充分条件 (3.13)，见王日爽 (1979) 的文章. 刘鼎元 ([2], 1979) 则把它推广到张力样条以及大挠度的场合.

对于插值二次样条函数，只要注意到它的连续性方程的系数矩阵主对角元都等于 3，就可看出保凸的一个充分条件:

$$F_i^* > \frac{1}{3}(\mu_i F_{i-1}^* + \lambda_i F_{i+1}^*) \quad (i=0, 1, \cdots, n). \qquad (3.14)$$

当节点等距分布时，$\lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2}$. 这时，从 (3.13) 和 (3.14) 还可看出，对于插值三次和插值二次样条函数，只要它们相邻 F_i^* 的比值分别不超过 2 和 3，就一定是保凸的. 由此可见，二次的保凸性比三次的要好，然而光顺性和连续性则稍差.

上面关于保凸性条件的讨论，是直接从型值点数据出发的，所得到的插值三次和插值二次样条函数保凸的充分条件 (3.13) 和 (3.14)，称为先验估计.

在有些问题中，对样条函数在节点处的一阶导数值 m_i 的估计比较容易，希望从 m_i 出发来判断样条函数的凸性，我们称它为后验估计. 这自然比上面的问题要容易得多.

我们现在取出样条的一段，并使用 § 1 的记号. 设函数和其一、二阶导数在相邻两个节点 x_0 和 x_1 处的数值分别为 y_0、m_0、M_0 和 y_1、m_1、M_1. 并且记 $h = x_1 - x_0$，函数的差商 $Dy = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. 插值三次样条函数在相邻两个节点处的一、二阶导数和差商满足下列关系式:

$$\begin{cases} M_0 = -\frac{2}{h}(2m_0 + m_1 - 3Dy), \\ M_1 = \frac{2}{h}(m_0 + 2m_1 - 3Dy). \end{cases}$$

曲线段上无拐点的充要条件是 $M_0 \cdot M_1 > 0$，即

$$[2(m_0 - Dy) - (Dy - m_1)][(m_0 - Dy) - 2(Dy - m_1)] < 0,$$

或等价地

$$\frac{1}{2}<\frac{m_0-Dy}{Dy-m_1}<2. \tag{3.15}$$

这就是插值三次样条函数保凸的充要条件.

由(2.4)式得知，插值二次样条函数在相邻两个节点处的一、二阶导数和函数的差商满足下列关系式:

$$\begin{cases} M_0=\frac{1}{h}[4Dy-3m_0-m_1], \\ M_1=\frac{-1}{h}[4Dy-m_0-3m_1]. \end{cases}$$

样条上的拐点只可能出现在半节点处，因此样条曲线上无拐点的充要条件是 $M_0\cdot M_1>0$, 或等价地是

$$\frac{1}{3}<\frac{m_0-Dy}{Dy-m_1}<3. \tag{3.16}$$

这就是插值二次样条函数保凸的充要条件.

比较(3.15)和(3.16)两式，也能看出插值二次样条函数的保凸性优于插值三次样条函数.

第三章　三次参数样条曲线

§1 背景和发展

我们在上一章着重介绍了三次样条函数，并且论述了它的力学背景就是小挠度的木样条. 理论分析和实际应用都表明，在小挠度情况下用三次样条函数插值的曲线，和用木样条直接画出来的曲线非常相近. 效果是令人满意的.

然而，实际问题中经常遇到大挠度曲线，即 $|y'|\gg1$ 的情况. 从上一章的分析知道，这时 y'' 与曲率 k 有相当大的偏差，木样条的数学模型就不能是三次样条函数. 话虽然这么讲，实用时究竟会不会出问题呢？确实是有问题. 让我们看一个实例.

某海轮一条肋骨线型值为：

x	8.125	8.4	9	9.485	9.6	9.959	10.166	10.2
y	0.0774	0.099	0.28	0.6	0.708	1.2	1.8	2.177

给定Ⅰ型边界条件

$$m_0=0.01087,\quad m_n=100.$$

从上一章的 M 连续性方程(1.7)和(1.14)，求出各型值点的二阶导数 y_i''，从(1.6)求得各型值点的一阶导数 y_i' 和在各型值点的曲率

$k_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 7)$．结果如下：

y''	0.300	0.895	−0.517	5.637	−42.069	116.494	−519.809	8000
k	0.300	0.855	−0.459	0.923	−27.747	0.055	−0.021	0.008

从计算结果看出曲率时正时负，跳跃很大．曲线上共有 6 个拐点，根本不能用．但是，如果固定型值点位置和边界切线方向不变，仅仅将直角坐标系 $\{0;\ x,\ y\}$ 绕原点 0 逆时针旋转 $45°$ 成 $\{0;\ \bar{x},\ \bar{y}\}$，在新坐标系中求得所有的 $|\bar{y}'|<1$，各型值点的二阶导数和曲率为：

$\bar{y}''$	1.344	0.863	0.562	0.443	0.489	0.522	0.819	1.299
$\bar{k}$	0.491	0.444	0.471	0.440	0.489	0.455	0.455	0.459

很明显，后者曲率变化非常均匀，曲线是光顺的（图 1）．

从这个例子看出，应用于计算几何中的样条函数存在两个问题：

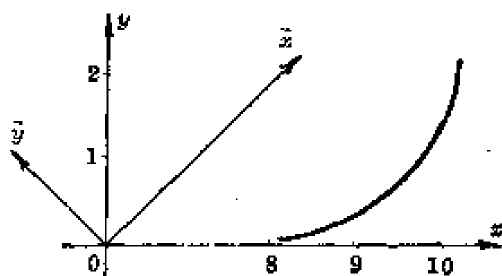


图　1

(1) 在大挠度情况下，三次样条函数的光顺性可能变坏，甚至不能使用．

(2) 在给定了型值点的位置和边界切向后，用三次样条函数表示的插值曲线，依赖于坐标系的选择，这样就缺乏几何不变性，和曲线的几何特征相脱节．

第一个问题或许还可以补救．这个例子实际上给出一个弥补的办法：适当旋转坐标系，化大挠度为小挠度．但是，这仅仅适用于一部分曲线．对于球觵艏轮廓那种曲线，因为出现了半圆，无论怎么旋转也找不到使曲线成为小挠度的坐标系．至于象封闭曲线这类多值函数，在直角坐标系里的函数表示都很麻烦，更谈不上挠度的大小了．

第二个问题是根本性的．计算几何中研究的对象是几何图

形. 起初的想法是,只要建立起坐标系,图形就转化成函数. 函数逼近论是一门成熟的学科,可被运用. 在这个领域里,样条函数起了重要的作用. 随着几何外形设计问题的深入展开,需要对图形的几何特征有更多的了解,比方曲线的拐点和奇点,曲面的凸性等等. 用样条函数来研究图形的几何性质,由于表示方式缺乏几何不变性,自然是不方便的. 这是计算几何的早期阶段.

为了解决这些问题,人们提出了参数样条方法:曲线的每一个分量取自某种样条函数,形式上合并起来组成参数样条,例如:

三次样条函数→三次参数样条曲线 (1963, Ferguson);

双三次样条函数(1962, deBoor)→Coons 曲面(1964～1967);

Bernstein 基函数→Bézier 曲线(1962～1968);

B 样条函数(1946, Schoenberg)→B 样条曲线(1972～1974).

本书中所讨论的曲线和样条, 全部是具有参数多项式的代数形式的, 以后不再声明这代数形式, 而简称为参数曲线和参数样条.

把参数样条的表示写成向量形式, 我们可不必依赖于坐标系的选择就直接讨论这些几何对象. 这种几何化的趋势可以看成发展的第二阶段.

在这一阶段, 当然可以通过曲线分量的函数论性质了解到曲线的一些特点, 但是对于曲线的几何特征还是基本上没有进行深入的研究. 通俗地讲, 我们还不能够把这些分量"混在一起"来考察. 各别地研究这些分量是线性空间的问题,比较容易. 然而,把它们混在一起, 比如讨论曲率函数 $k(t)$, 那就会带来非线性的问题,这从函数论角度看,或许是个难点.

在这本书里,我们将运用经典代数几何的方法研究参数曲线,讨论它们的仿射不变量和实奇点、实拐点的分布情况,以期控制这类曲线段. 这些只是作为研究参数曲线的几何特征方面的一个尝试提出来,仅仅开了一个头. 完全解决这方面的问题,还有许多工

作要做.

本章将讨论三次参数曲线的仿射不变量及几何特征，给出几种用三次参数曲线段构造的样条曲线. 这种形式的参数样条特别适用于插值. 在下一章即第四章介绍的 Bézier 曲线和 B 样条曲线，也都是参数曲线段或参数样条的一种特殊表示，本质上是一种逼近方案，主要应用于外形设计. 在最后一章即第八章将论述五次参数曲线的实奇点和实拐点的分布，并一般地讨论平面和高维仿射空间的 n 次参数曲线的仿射不变量. 我们的期望是通过这一类问题的深入研究来实现对 n 次 Bézier 曲线和 B 样条曲线的形状控制，并且有助于参数曲面的几何特征的研究.

§2　三次参数曲线和有关的仿射不变量

现在，我们将研究三次参数曲线

$$\begin{cases} x = a_0 + a_1 t + \dfrac{1}{2} a_2 t^2 + \dfrac{1}{6} a_3 t^3, \\ y = b_0 + b_1 t + \dfrac{1}{2} b_2 t^2 + \dfrac{1}{6} b_3 t^3 \end{cases} \tag{2.1}$$

的仿射不变量和一些有关性质(苏步青 [2], 1976)，目的是为了要对 (2.1) 作出以实奇点和实拐点的个数作为特征的仿射分类. 我们将在本节和以后几节中，用相当篇幅继续这方面的研究. 我们之所以有必要这样做，是由于参数曲线较之多项式函数曲线要复杂得多. 比方，三次参数曲线段

$$\begin{cases} x = 5t - 11.5t^2 + 7.5t^3, \\ y = 2t - t^2 - 0.67t^3 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

的 x 分量有一个拐点，y 分量无拐点，合成以后并无拐点，却有一个奇点(图 2). 因此，我们仅仅从分量的性质一般不足以推断参数曲线的几何特征，而必须另找办法.

首先指出：(2.1) 的参数 t 不能取作为参数曲线的弧长 s. 实

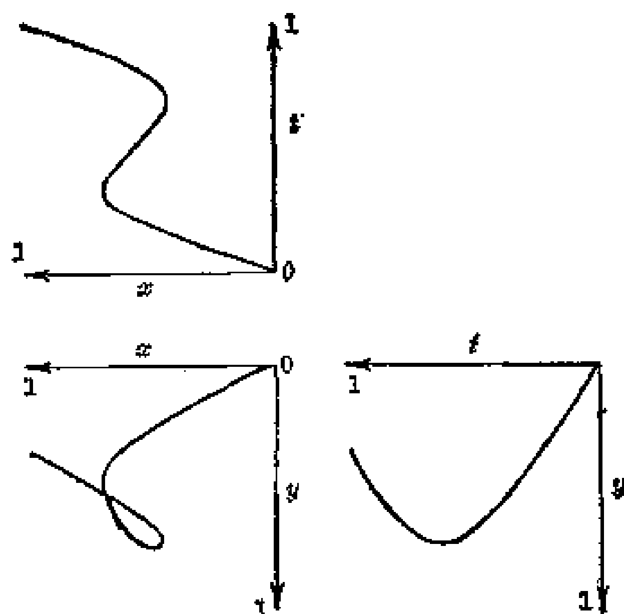


图 2

际上，写 $\frac{dx}{dt}=x'$，$\frac{d^2x}{dt^2}=x''$ 等等. 假如 $t=s$，那末，我们从 $x'^2+y'^2\equiv1$ 便得出

$$x'x''+y'y''\equiv0,$$

即 $$\frac{1}{2}(a_3^2+b_3^2)t^3+\frac{3}{2}(a_2a_3+b_2b_3)t^2+(a_2^2+b_2^2+a_1a_3+b_1b_3)t+(a_1a_2+b_1b_2)\equiv0.$$

从而立即得出

$$a_3=0,\ b_3=0;\ a_2=0,\ b_2=0.$$

于是曲线(2.1)变为一种退化情况的直线.

三次参数曲线(2.1)在代数曲线论中称为三次有理整曲线，它有一个奇点和两个拐点(包括虚的)，而且这个奇点一定是尖点或二重点. 为了弄清楚曲线(2.1)上有没有实奇点或实拐点，我们对它进行仿射变换

$$\begin{cases}\bar{x}=\alpha x+\beta y+\xi,\\ \bar{y}=\gamma x+\delta y+\eta,\end{cases}\tag{2.2}$$

其中 $J\equiv\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$，曲线的参数方程(2.1)变为

$$\begin{cases}\bar{x}=\bar{a}_0+\bar{a}_1t+\dfrac{1}{2}\bar{a}_2t^2+\dfrac{1}{6}\bar{a}_3t^3,\\ \bar{y}=\bar{b}_0+\bar{b}_1t+\dfrac{1}{2}\bar{b}_2t^2+\dfrac{1}{6}\bar{b}_3t^3,\end{cases}\tag{2.3}$$

原曲线(2.1)的任一奇点或拐点仍然变换到新曲线(2.3)上的同一类奇点或拐点. 而适当选择仿射变换(2.2), 常常能使新曲线(2.3)的方程变得简单一些, 以便于研究. 仿射变换(2.2)的相对仿射不变量是我们所关心的, 因为它们同曲线的实奇点与实拐点有着密切关系. 关于参数曲线及其仿射不变量的有关内容将在第八章§1叙述.

在本书中我们不对参数曲线进行射影变换, 这是因为经过射影变换之后, 奇点和拐点可能变换到无穷远处, 闭曲线也可能变换成剪开的样子, 例如椭圆可以变换成双曲线的两支. 这些都是我们所不希望的.

经过仿射变换(2.2)后, 新曲线(2.3)与原曲线(2.1)系数之间存在下列关系:

$$\begin{cases}\bar{a}_1=\alpha a_1+\beta b_1, & \bar{b}_1=\gamma a_1+\delta b_1;\\ \bar{a}_2=\alpha a_2+\beta b_2, & \bar{b}_2=\gamma a_2+\delta b_2;\\ \bar{a}_3=\alpha a_3+\beta b_3, & \bar{b}_3=\gamma a_3+\delta b_3.\end{cases}$$

记

$$\begin{cases}p=a_2b_3-a_3b_2,\\ q=a_3b_1-a_1b_3,\\ r=a_1b_2-a_2b_1,\end{cases}\tag{2.4}$$

这些就是向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 和向量 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的三个分量. 显然, 它们都是关于仿射变换(2.2)的权1的相对仿射不变量: 经过仿射变换(2.2)之后, 我们有

$$\bar{p}=Jp,\quad \bar{q}=Jq,\quad \bar{r}=Jr.\tag{2.5}$$

在(2.1)里, a_3 和 b_3 不全为零, 否则, 所论曲线就不是三次了. 我们不妨假定 $b_3\neq0$. 从(2.1)容易导出

$$b_3x-a_3y+a_3b_0-a_0b_3=\frac{1}{2}pt^2-qt.$$

如果 $p=0$, q 就不能等于零, 于是写

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{1}{q}(-b_3x+a_3y+a_0b_3-a_3b_0),\\ \bar{y}=\dfrac{6}{b_3}y,\end{cases}$$

便有

$$\bar{y}=a+b\bar{x}+c\bar{x}^2+\bar{x}^3,$$

说明新曲线 (2.3) 是三次多项式曲线, 只有一个拐点而并无奇点. 进一步的推导将表明, $p=0$ 时的三次参数曲线 (2.1) 其实是普通的三次多项式曲线, 有人称它为"单拐曲线".

三次参数曲线(2.1)的拐点决定于方程

$$x'y''-x''y'=0,$$

即

$$pt^2-2qt+2r=0. \tag{2.6}$$

当 $p\neq0$ 时, 曲线(2.1)上有两个实拐点的充要条件是

$$q^2-2pr>0. \tag{2.7}$$

现在我们讨论一般三次参数曲线 (2.1) 的奇点. 这时, $p\neq0$. 从(2.5)得知, 任何一个关于 p, q, r 的二次型, 例如: q^2-2pr 是关于仿射变换(2.1)的权 2 的相对仿射不变量, 因此, 它的符号是具有仿射几何的意义的.

为了将 (2.1) 变换成一种较为简单形式的代数方程表示的曲线, 我们施行下列仿射变换:

$$\begin{cases}x^*=\dfrac{2}{p}(-b_3x+a_3y+a_0b_3-a_3b_0)-\dfrac{q^2}{p^2},\\ y^*=\dfrac{6}{b_3}y,\end{cases} \tag{2.8}$$

其中变换行列式

$$J^*=-\frac{12}{p}\neq0,$$

我们获得曲线(2.1)的仿射象, 它的方程是:

$$\begin{cases} x^* = -t^{*2}, \\ y^* = t^{*3} + at^{*2} + bt^* + c, \end{cases} \tag{2.9}$$

式中已置

$$t = t^* + \frac{q}{p}.$$

从(2.9)消去参数 t^*，便有

$$f(x^*, y^*) \equiv (y^* + ax^* - c)^2 + x^*(x^* - b)^2 = 0. \tag{2.10}$$

这条曲线的奇点决定于方程组：

$$f = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x^*} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y^*} = 0.$$

若记

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial y^*} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial y^*} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} \end{vmatrix},$$

则按照 $H \gtreqless 0$，曲线(2.10)依次是无实奇点、有一个尖点或有一个二重点.

从此容易得出，当 $b = 0$ 时，曲线(2.10)有一个尖点

$$x^* = 0, \ y^* = c,$$

而且对应参数 t 的值

$$t = \frac{q}{p}. \tag{2.11}$$

当 $b < 0$ 时，曲线(2.10)有一个二重点

$$x^* = b, \ y^* = c - ab,$$

而且参数 t 的值有两个，即

$$t_\varepsilon = \frac{q}{p} + \varepsilon\sqrt{-b} \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{2.12}$$

当 $b > 0$ 时，曲线(2.10)上没有实奇点，但出现两个实拐点. 实际上，从(2.9)得知

$$p^* = -12, \ q^* = 0, \ r^* = 2b,$$

所以

$$q^{*2}-2p^*r^*=48b,$$

因此从(2.5)和 $J^*=-\frac{12}{p}$，得到

$$J^2(q^2-2pr)=48b$$

或

$$b=3\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}\right\}. \tag{2.13}$$

这样，当 $b>0$ 时，$q^2-2pr>0$. 按照(2.7)式，曲线上就出现两个实拐点.

于是，我们找到了曲线(2.1)的一个最重要的相对仿射不变量

$$I=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}. \tag{2.14}$$

I 的符号同三次参数曲线 (2.1) 的实奇点和实拐点的个数密切相关(见图 3)：

$$I\begin{cases}>0\ \text{时，曲线有两个实拐点，而无实奇点；}\\ =0\ \text{时，曲线上出现一个尖点，而无实拐点；}\\ <0\ \text{时，曲线上出现一个二重点，}\\ \quad\ \text{而无实拐点.}\end{cases} \tag{2.15}$$



图 3

相对仿射不变量 I 关于参数的线性变换的权是 -2. 事实上，当参数 t 受到线性变换

$$t=C\bar{t}+f \quad (C\neq 0)$$

时，有关的 p, q, r 分别变为 C^5p, $C^4(q-fp)$, $C^3\left(r-fq+\frac{1}{2}f^2p\right)$，从而 q^2-2pr 变为 $C^8(q^2-2pr)$. 因此 I 变为 $C^{-2}I$. 这表明 I 的符号同参数的线性变换无关.

§3 多余拐点出现的充要条件

本节，我们将转而讨论三次参数曲线段

$$\begin{cases} x=a_0+a_1t+\frac{1}{2}a_2t^2+\frac{1}{6}a_3t^3, \\ y=b_0+b_1t+\frac{1}{2}b_2t^2+\frac{1}{6}b_3t^3 \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{3.1}$$

的多余拐点问题(苏步青 [2], 1976). 曲线段 (3.1) 与曲线 (2.1) 的不同之处在于：比方，当 $p\neq 0$, $I>0$ 时，整条曲线(2.1)上固然要有两个实拐点，但是这两拐点不一定在所论曲线段 (3.1) 上出现.

当 $p=0$ 时，如前所证，曲线段是普通的三次多项式曲线. 判别这类曲线段上有无实拐点是十分简单的：如果曲线段在两端的曲率有不同的符号，在其上就不可避免地要出现一个拐点. 如果在两端的曲率符号相同就不会出现拐点. 我们只讨论 $p\neq 0$ 的情况.

这时，曲线段(3.1)的实拐点(如果存在)所对应的参数值是二次方程(2.6)的根. 为了方程(2.6)要有两个落在区间[0, T]里的实根充要条件如下：

I $\quad q^2-2pr>0$,

II $\quad pr>0$,

III $\quad qr>0$,

IV $\quad T^2-2\frac{q}{p}T+2\frac{r}{p}>0$,

V $\quad T>\frac{q}{p}$.

此外，在实用上 T 常常取成曲线段的弦长：

$$T=\sqrt{[x(T)-x(0)]^2+[y(T)-y(0)]^2},$$

在这种场合，我们还要附加条件

$$\text{VI}\quad \left(a_1+\frac{1}{2}a_2T+\frac{1}{6}a_3T^2\right)^2+\left(b_1+\frac{1}{2}b_2T+\frac{1}{6}b_3T^2\right)^2=1.$$

从而立即导出一个用以判别拐点个数的准则：

为了曲线段(3.1)上不出现多于一个实拐点的情况，充要条件是 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的三分量 p, q, r 有不同的符号；或者满足 $q^2-2pr<0$；或者从 VI 求出正根 T 之后，IV 和 V 中至少有一个不成立.

如上所述，我们考虑曲线段两端的曲率乘积的符号，就是：

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(\varkappa(0)\varkappa(T))&=\operatorname{sign}(\rho(0)\rho(T))\\&=\operatorname{sign}[r(pT^2-2qT+2r)],\end{aligned}$$

其中 $$\rho(t)=pt^2-2qt+2r.$$

从 II 和 IV 立即得到

$$\varkappa(0)\varkappa(T)>0.$$

反之，我们从最后不等式和 II 容易看出 IV 的成立.

综合起来，我们得到如下的判别曲线段(3.1)上存在两个实拐点的充要条件：

1. 曲线段两端曲率有同一符号；
2. p, q, r 有同符号；
3. $q^2-2pr>0$；
4. $T>\dfrac{q}{p}$.

式中，T 是方程 VI 的正根.

忻元龙找到了一个使上列条件 I～VI 全部成立的实例：

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=-\frac{3}{2};$$

$$b_1=-1,\ b_2=0,\ b_3=\frac{3}{4};$$

$$T=3\frac{1}{5}.$$

这里，$p=\frac{3}{4}$，$q=\frac{3}{2}$，$r=1$；方程(2.6)的两根是$2\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$. 为了明确这条曲线的拐点的分布情况，我们用前述的方法把曲线的方程(3.1)化为形式(2.9)，其中$t^*=t-2$；$a=6$，$b=4$，$c=-8$，从而$D=a^2-3b=24$，曲线的具体形状如图4所示. 它是原曲线的仿射变换，已经不和原来的形状相符合了，但拐点的分布还是一样的.

$$a>0,\ b>0,\ D=a^2-3b>0,$$

极值点的参数值：

$$t_1,\ t_2=(-a\pm\sqrt{D})/3;$$

拐点的参数值：

$$\tau_1,\ \tau_2=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}.$$

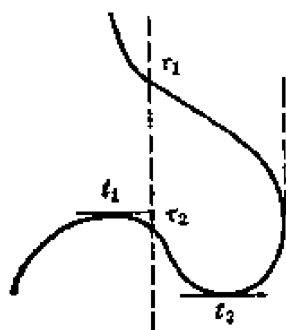


图 4

这个例子表明了，在一段三次参数曲线上要出现两个实拐点，所需的条件看来虽是相当苛刻、一般不易实现的，但是还有可能. 所以在生产实践中，我们必须按照上列准则加以检验.

在计算几何中实际应用三次参数曲线段(3.1)的时候，还经常取$T=1$. 对这种情况，出现两个拐点的充要条件是类似的，只需令$T=1$，而且取消条件VI. 具体地表达出来，就有：

I′ $q^2-2pr>0$,

II′ $pr>0$,

III′ $qr>0$,

IV′ $2\frac{r}{p}-2\frac{q}{p}+1>0$,

V′ $\frac{q}{p}<1$.

同样，可以用曲线在两端的曲率符号相同来代替条件IV′.

最后，我们从等式VI导出关于T的几个不等式，作为当$T\neq1$时曲线段(3.1)上出现两个实拐点必要的但非充分的条件来使用.

为此目的，令

$$A_1=a_1+\frac{1}{2}a_2T+\frac{1}{6}a_3T^2,\ B_1=b_1+\frac{1}{2}b_2T+\frac{1}{6}b_3T^2,$$

于是 VI 便化为 $A_1^2+B_1^2=1$. 在这里，利用不等式

$$(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)\geqslant(A_1A_2+B_1B_2)^2,$$

我们在 A_2, B_2 的三种不同选取下得出下列不等式：

(1) $a_3^2+b_3^2\geqslant\left(\frac{1}{2}pT-q\right)^2$,

(2) $a_2^2+b_2^2\geqslant\left(\frac{1}{6}pT^2-r\right)^2$,

(3) $a_1^2+b_1^2\geqslant T^2\left(\frac{1}{6}qT-\frac{1}{2}r\right)^2$.

这些有时适用于检查不出现双拐点的情况，只要能找出上列不等式中有一个不成立就可以了.

§4 关于三次参数曲线段的一个定理

三次参数曲线段上可能出现多余拐点或奇点，造成曲线段不光顺，这是一个缺陷. 由于人们常常顾虑三次参数曲线段的奇点和拐点不容易控制，以致这类本来有着优越的几何特性的曲线，不能发挥它应有的广阔且有力的作用. 本节将给出一种方法：为了消除多余拐点和奇点，在不改变曲线段在两端点的切线方向的条件下，把各切线向量模分别改为 λ 倍和 μ 倍 (λ, $\mu>0$)，在 (λ, μ) 平面第一象限里，我们找到了一个矩形区域 $\mathscr{D}$ 即所谓正则区域，使对于 $\mathscr{D}$ 的点 (λ, μ) 所作的三次参数曲线段，既无多余拐点，又无奇点(苏步青 [3], 1977).

我们方便上取定适当的直角坐标系 $\{0xy\}$，使得

$$\begin{cases}x(0)=0, & y(0)=0;\\ x(1)=l, & y(1)=0;\end{cases}\tag{4.1}$$

$$\begin{cases} x'(0)=\lambda a_0, & y'(0)=\lambda b_0; \\ x'(1)=\mu a_1, & y'(1)=\mu b_1. \end{cases} \tag{4.2}$$

式中 l 表示连接两端点的弦长 $\overline{OL}$; (a_0, b_0) 和 (a_1, b_1) 代表曲线段在两端点的切方向，并且 $a_0, a_1>0$, $b_0>0>b_1$; $\lambda, \mu>0$（参见图5）.

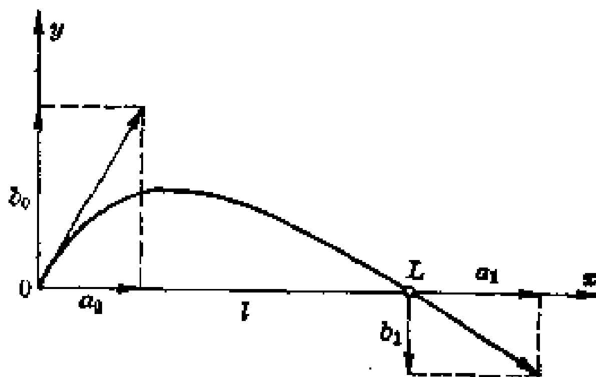


图 5

现在，按照边界值(4.1)和(4.2)所确定的三次参数 Hermite 插值曲线方程是

$$\begin{cases} x(t)=\bar{a}_1 t+\dfrac{1}{2}\bar{a}_2 t^2+\dfrac{1}{6}\bar{a}_3 t^3, \\ y(t)=\bar{b}_1 t+\dfrac{1}{2}\bar{b}_2 t^2+\dfrac{1}{6}\bar{b}_3 t^3 \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{4.3}$$

式中

$$\begin{cases} \bar{a}_1=\lambda a_0, \quad \bar{a}_2=2(3l-2\lambda a_0-\mu a_1), \\ \bar{a}_3=6(-2l+\lambda a_0+\mu a_1); \\ \bar{b}_1=\lambda b_0, \quad \bar{b}_2=-2(2\lambda b_0+\mu b_1), \\ \bar{b}_3=6(\lambda b_0+\mu b_1). \end{cases} \tag{4.4}$$

由此导出

$$\begin{cases} p=12\{(-\lambda b_0+\mu b_1)l+\lambda\mu\Delta\}, \\ q=6\lambda(\mu\Delta-2b_0 l), \\ r=2\lambda(\mu\Delta-3b_0 l), \end{cases} \tag{4.5}$$

这里 $\Delta=a_1 b_0-a_0 b_1>0$.

把这些表示式代进不变量 q^2-2pr 里，我们便有

$$q^2-2pr=-12\lambda\mu\Delta^2\left\{\left(\lambda+\frac{4b_1l}{\Delta}\right)\left(\mu-\frac{4b_0l}{\Delta}\right)+\frac{4b_0b_1l^2}{\Delta^2}\right\}. \tag{4.6}$$

因为 λ, $\mu>0$, 所以从判别奇点的准则(2.15)立即导出：整条三次参数曲线按照

$$\left(\lambda+\frac{4b_1l}{\Delta}\right)\left(\mu-\frac{4b_0l}{\Delta}\right)+\frac{4b_0b_1l^2}{\Delta^2}\gtreqless 0$$

而分别具有一个二重点、一个尖点或两个拐点.

因此, (λ, μ) 平面的第一象限是由双曲线 C:

$$\left(\lambda+\frac{4b_1l}{\Delta}\right)\left(\mu-\frac{4b_0l}{\Delta}\right)+\frac{4b_0b_1l^2}{\Delta^2}=0 \tag{4.7}$$

划分成为二重点区域 D_1、D_2 和拐点区域 I, 双曲线 C 是尖点所在的(参见图 6).

我们将证明关于三次参数曲线段的拐点和奇点分布的定理如下:

定理 设在矩形区域

$$\mathscr{D}:\ 0<\lambda<-\frac{3b_1l}{\Delta},\ 0<\mu<\frac{3b_0l}{\Delta}$$

里任取一点 (λ, μ), 用以构成相应的三次参数曲线段(4.3), 那末,

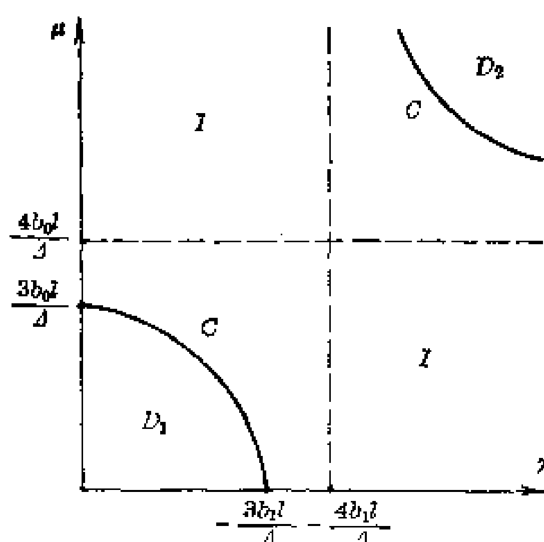


图 6

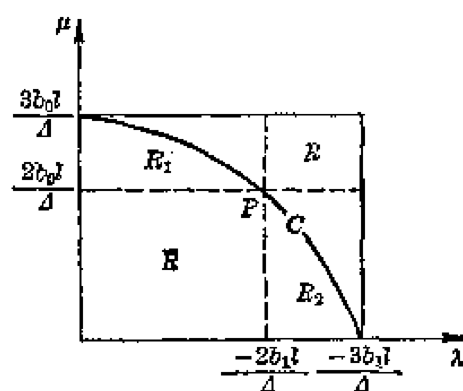


图 7

这段曲线既不包含多余拐点，又不含有奇点.

证明 首先，我们指出：在整块区域 $\mathscr{D}$ 上任取一点 (λ, μ) 时，所对应的三次参数曲线段 (4.3) 上都不出现多余的拐点. 为了阐明这个事实，把矩形区域 $\mathscr{D}$ 划分为四块领域 R, R_1, R_2, $\bar{R}$, 中间还插入一段表示尖点可能在其上的双曲线段 C; 这四个矩形有一个公共顶点

$$P\left(\frac{-2b_1l}{\Delta}, \frac{2b_0l}{\Delta}\right),$$

它在 C 上(参见图 7).

第一 在 $R\left(\frac{-2b_1l}{\Delta}\leqq\lambda<\frac{-3b_1l}{\Delta},\ \frac{2b_0l}{\Delta}\leqq\mu<\frac{3b_0l}{\Delta}\right)$ 上，$r<0$, $q\geqq 0$ (参见(4.5)). 因为一般地成立

$$p-2q+2r=4\mu(\lambda\Delta+3b_1l)<0,$$

所以两端的曲率同符号. 用 §3 的判别准则得知，在对应的曲线段上不出现多余的拐点，因为当 $q>0$ 时这是自明的，而当 $q=0$, 即 $\mu\Delta-2b_0l=0$ 时，由于

$$p=q+6\mu(\lambda\Delta+2b_1l), \tag{4.8}$$

因此 $p>0$, 这样，也不出现多余的拐点，除非 $\lambda\Delta+2b_1l=0$, 但这时 (λ, μ) 表示 C 上的 P 点.

第二 如果 $(\lambda, \mu)\in R_1\left(0<\lambda\leqq-\frac{2b_1l}{\Delta},\ \frac{2b_0l}{\Delta}\leqq\mu<\frac{3b_0l}{\Delta}\right)$, 则 $r<0$, $q\geqq 0$. 从(4.8)得知，$p-q\leqq 0$. 所以，当 $p>0$ 时 $\frac{q}{p}\geqq 1$, 而当 $p<0$ 时 $\frac{q}{p}\leqq 0$. 因此，曲线段上并不出现多余的拐点.

第三 如果 $(\lambda, \mu)\in R_2\left(\frac{-2b_1l}{\Delta}\leqq\lambda<-\frac{3b_1l}{\Delta},\ 0<\mu\leqq\frac{2b_0l}{\Delta}\right)$, 则 $q<0$, 而且从(4.8)便有 $p-q\geqq 0$. 所以，当 $p>0$ 时 $\frac{q}{p}<0$, 而当 $p<0$ 时 $\frac{q}{p}\geqq 1$. 因此，我们得出同一结论.

第四 如果 $(\lambda, \mu)\in\bar{R}\left(0<\lambda<\frac{-2b_1l}{\Delta},\ 0<\mu<\frac{2b_0l}{\Delta}\right)$, 从(4.6)就有 $q^2-2pr<0$, 就是说，这时不出现多余的拐点.

其次，我们将检查 C 曲线段上的点 (λ, μ) 所对应的三次参数曲线段有没有尖点.

从 (4.4) 得知，对于 P 点 $\lambda=-\frac{2b_1l}{\Delta}$，$\mu=\frac{2b_0l}{\Delta}$，我们有 $\bar{a}_3=\bar{b}_3=0$，从而曲线(4.3)退化为二次曲线，因此，它没有尖点.

对于 C 曲线段上 P 以外的点 (λ, μ) 所对应的曲线段 (4.3)，显然满足 $p\neq0$，而且按照 $\mu\Delta-2b_0l>0$ 或者 <0 而被划分为两小段：在前一小段上，$0<\lambda<-\frac{2b_1l}{\Delta}$(参见图 7)，$q>0$，$p=q^2/(2r)<0$，所以 $q/p<0$. 从(2.11)得知，在这一小段上的点(λ, μ)并不给出任何尖点.

在后一小段上，$-\frac{2b_1l}{\Delta}<\lambda<-\frac{3b_1l}{\Delta}$，$q<0$，从(4.8)又有 $p-q>0$，$p=\frac{q^2}{2r}<0$. 所以 $q/p>1$，任何尖点不会出现.

最后，要完成定理的证明，只须讨论二重点会不会出现的问题就够了. 这时，点(λ, μ)仅仅可能落在 $\mathscr{D}$ 由 C 曲线所限界的左下方区域之内.

如前所述，$b<0$，即

$$2pr>q^2.$$

但是 $r<0$，所以

$$p<0. \tag{4.9}$$

为了点(λ, μ)所对应的曲线段(4.3)上要有二重点存在，充要条件是：由(2.12)定义的两根 t_1 和 t_{-1} 都必须在区间(0, 1)里. 这就是说

$$0<\frac{q}{p}+\varepsilon\sqrt{-b}<1 \quad (\varepsilon=\pm1). \tag{4.10}$$

这是因为，在只有一个根 t_1 或 t_{-1} 落到(0, 1)的情况下，对应的曲线段(4.3)不包含另一支通过二重点的曲线段.

从(4.10)首先导出

$$0<\frac{q}{p}<1, \tag{4.11}$$

而且与(4.9)比较的结果

$$p-q<0,\ q<0,$$

从而

$$\mu<\frac{2b_0l}{\Delta},\ \lambda<-\frac{2b_1l}{\Delta}. \tag{4.12}$$

$(4.10)_1$ 即 $0<\frac{q}{p}-\sqrt{-b}<1$, 仅给出

$$-\frac{q}{p}<-\sqrt{-b},\ 即\ -b<\left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

或按(2.13)改写为

$$2\frac{r}{p}<\frac{4}{3}\left(\frac{q}{p}\right)^2.$$

又从 $(4.10)_2$, 即 $0<\frac{q}{p}+\sqrt{-b}<1$, 仅能导出

$$\sqrt{-b}<1-\frac{q}{p},\ 即\ -b<\left(1-\frac{q}{p}\right)^2,$$

或按(2.13)改写为

$$2\frac{r}{p}<\frac{1}{3}\left(1-\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^2.$$

这样,我们获得了两套不等式,即(4.11)和

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2<\frac{2r}{p}<\min\left[\frac{4}{3}\left(\frac{q}{p}\right)^2,\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{q}{p}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^2\right].$$

如果令 $\frac{q}{p}=\xi$, 就可把它们表达为:

$$0<\xi<1,\ \xi^2<\frac{2r}{p}<\min\left(\frac{4}{3}\xi^2,\ \frac{1}{3}(1-\xi)^2+\xi^2\right). \tag{4.13}$$

现在,为了要证明 λ 和 μ 的不存在,我们相反地假定

$$\lambda=-2m\frac{b_1l}{\Delta},\ \mu=2n\frac{b_0l}{\Delta},$$

于是(4.12)变为

$$0<m,\ n<1. \tag{4.14}$$

从(4.5)我们得出

$$\xi=\frac{m(1-n)}{m+n-2mn}, \tag{4.15}$$

$$\frac{2r}{p}=\frac{m(3-2n)}{3(m+n-2mn)}. \tag{4.16}$$

另一方面，按照

$$(1-\xi)^2 \lesseqgtr \xi^2$$

之不同，我们区分三种情况进行对(4.13)的研究.

情况 I.

$$(1-\xi)^2<\xi^2.$$

此时，(4.13)为下列诸不等式所代替：

$$\frac{1}{2}<\xi<1, \quad \xi^2<\frac{2r}{p}<\frac{1}{3}(1-\xi)^2+\xi^2. \tag{4.17}$$

把(4.15)代入(4.17)中的前一套，就有

$$m+n-2mn<2m(1-n)<2(m+n-2mn),$$

因为根据(4.14)得知

$$m+n-2mn=m(1-n)+n(1-m)>0.$$

从此容易导出 $m>n$，因此，可把它与(4.14)合写成为：

$$0<n<m<1.$$

又把(4.15)、(4.16)代入(4.17)中的后一套，稍加简化，并令

$$L=3m^2(1-n)^2, \quad M=m(3-2n)(m+n-2mn),$$

$$R=n^2(1-m)^2+3m^2(1-n)^2,$$

就可化这一套不等式为

$$L<M<R. \tag{4.18}$$

我们容易看出

$$M-L=nm(1-n)+(3-2n)n(1-m),$$

所以按照(4.14)便可断定 $L<M$，即(4.18)的前半成立.

至于(4.18)的后半是否成立，则须看 $R-M$ 是正或负. 可是从上列定义得到

$$R-M=2n\left[m-\frac{1}{4}(3+\sqrt{9-8n})\right]\left[m-\frac{1}{4}(3-\sqrt{9-8n})\right],$$

其中根据(4.14)

$$3>\sqrt{9-8n}>1.$$

要使 $R>M$,则必需满足下列条件:

(1) $4m-3>\sqrt{9-8n}$,

或者

(2) $4m-3<-\sqrt{9-8n}$.

从(1)得 $4m-3>1$, 即 $m>1$; 从(2)得 $4m-3<-3$, 即 $m<0$. 无论那一种,都和(4.14)相矛盾.

这样,我们已经证明 m, n 在这情况下是不存在的.

情况 II.

$$(1-\xi)^2=\xi^2.$$

此时 $\xi=\frac{1}{2}$,而且(4.13)变成

$$\frac{m(1-n)}{m+n-2mn}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<\frac{m(3-2n)}{3(m+n-2mn)}<\frac{1}{3}.$$

前一等式给出了 $m=n$,而后一套不等式因此被写成

$$\frac{3}{2}<\frac{3-2m}{1-m}<2.$$

前半等价于 $m<3$, 虽无矛盾,但后半却表明出不合理. 所以此时 m, n 也不存在.

情况 III.

$$(1-\xi)^2>\xi^2.$$

此时,(4.13)为下列诸不等式所代替:

$$0<\xi<\frac{1}{2},\ \xi^2<\frac{2r}{p}<\frac{4}{3}\xi^2.$$

和情况 I 一样,我们分别从此导出

$$0<m<n<1 \tag{4.19}$$

和 $$3m(1-n)^2<(3-2n)(m+n-2mn)<4m(1-n)^2.$$

在后一套不等式中,前半常成立,因为从(4.19)得出

$$(3-2n)(m+n-2mn)-3m(1-n)^2$$
$$=n\{1-mn+2(1-m)(1-n)\}>0.$$

可是，后半却给出了矛盾，这是由于

$$4m(1-n)^2-(3-2n)(m+n-2mn)=m-n-2n(1-n)<0.$$

所以 m, n 此时也不存在. 证毕.

§5 (λ, μ) 在全平面的拓广

现在，我们把前节的结果推广到(λ, μ)的全平面，以实现对于三次参数曲线段的形状控制(刘鼎元 [4], 1980). 在叙述方式上，也更几何化一些，将不取直角坐标系 $\{0xy\}$.

三次参数曲线(2.1)写成向量形式就是

$$\boldsymbol{P}(t)=\frac{1}{6}\boldsymbol{P}_3t^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_2t^2+\boldsymbol{P}_1t+\boldsymbol{P}_0. \tag{5.1}$$

而且(2.4)式的 p, q, r 将写成

$$\begin{cases} p=[\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3], \\ q=[\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1], \\ r=[\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2]. \end{cases} \tag{5.2}$$

式中记号 [ ] 代表按照两向量的分量组成的二阶行列式.

令

$$G=q^2-2pr. \tag{5.3}$$

给定了两端点 M_0, M_1 及在两端点处的切向量 $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}_1$, 那末三次参数曲线段的 Hermite 插值表示便是

$$\boldsymbol{P}(t)=\overrightarrow{OM_0}+t^2(3-2t)\boldsymbol{L}+t(t-1)^2\boldsymbol{A}_0+t^2(t-1)\boldsymbol{A}_1, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{5.4}$$

式中 $\boldsymbol{L}=\overrightarrow{M_0M_1}$. 因此，

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}'(0)=\boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{P}''(0)=6\boldsymbol{L}-4\boldsymbol{A}_0-2\boldsymbol{A}_1; \\ \boldsymbol{P}'(1)=\boldsymbol{A}_1, \quad \boldsymbol{P}''(1)=-6\boldsymbol{L}+2\boldsymbol{A}_0+4\boldsymbol{A}_1. \end{cases} \tag{5.5}$$

另一方面，从(5.1)式得出

$$\boldsymbol{P}'(0)=\boldsymbol{P}_1, \quad \boldsymbol{P}''(0)=\boldsymbol{P}_2, \quad \boldsymbol{P}''(1)=\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3. \tag{5.6}$$

这样，我们有

$$\begin{cases} p=-24\Delta[(\lambda-1)(\mu-1)-1], \\ q=12\Delta\lambda(2-\mu), \\ r=4\Delta\lambda(3-\mu), \end{cases} \tag{5.7}$$

$$G=-48\Delta^2\lambda\mu[(\lambda-4)(\mu-4)-4], \tag{5.8}$$

其中 $\Delta=\frac{1}{2}[\overrightarrow{M_0M}\ \overrightarrow{MM_1}]$ 表示 $\triangle M_0MM_1$ 的有向面积，M 是两条端点切线的交点，在我们的讨论中，$\Delta\neq 0$ 而且

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_0=\lambda\overrightarrow{M_0M}, \\ \boldsymbol{A}_1=\mu\overrightarrow{MM_1} \end{cases} \tag{5.9}$$

称 λ 和 μ 为两条端点切向量的**相对长度**(见图 8)，它们都是三次参数曲线段的仿射不变量，因为两个同方向的向量的长度之比是仿射不变的.

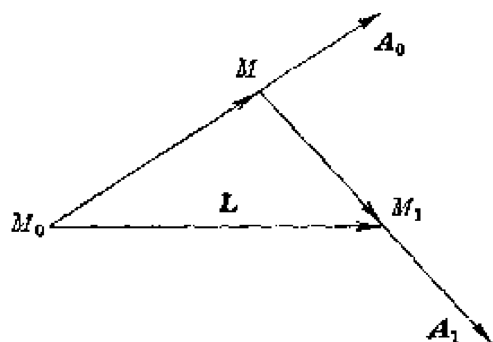


图 8

现在，我们来考察 (λ, μ) 同曲线段 (5.4) 的实奇点和实拐点分布的关系. 首先，在(λ, μ)平面上建立如图 9 所示的仿射坐标系 $\{0\lambda\mu\}$. 图中按照 λ 轴和 μ 轴，直线 $\lambda=3$ 和 $\mu=3$，双曲线 $(\lambda-4)(\mu-4)-4=0$，抛物线 $\mu^2-3\mu+\lambda=0$ 在第 II 象限的一段 l_2 和抛物线 $\lambda^2-3\lambda+\mu=0$ 在第 IV 象限的一段 l_4，将(λ, μ)平面划分成标记的各块区域. 例如，图 9 所示，N_1 表示 $0<\lambda<3$ 和 $0<\mu<3$ 的一块. C_1 表示以 $\lambda=4$ 和 $\mu=4$ 为渐近线的双曲线：

$$(\lambda-4)(\mu-4)-4=0$$

在其右上方的一支，C_0、C_2 和 C_4 分别表示这双曲线的另一支在第 I、II 和 IV 象限中的部分.

下面，凡讲到奇点和拐点之处，都是指实点而言.

在 § 2 已经讨论了整条三次参数曲线的奇点和拐点分布情况. 当 $p\neq 0$ 时，三次参数曲线(5.1)上的点 $\boldsymbol{P}(t_0)$ 是：

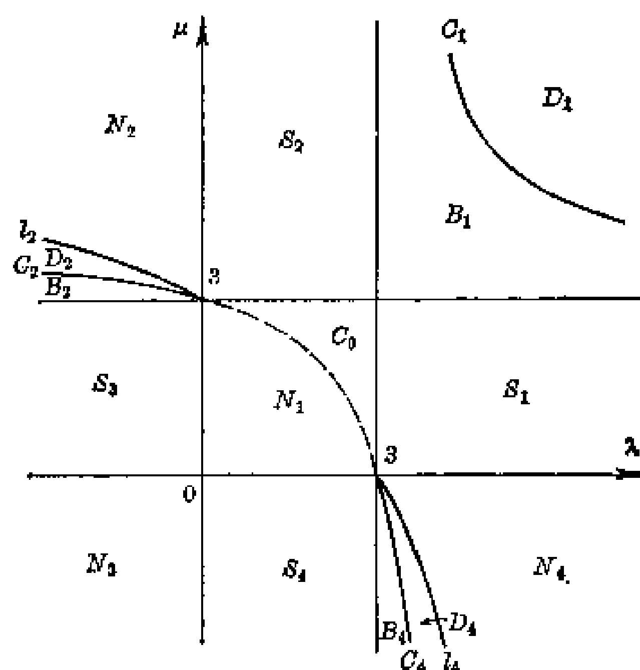


图 9

(1) 一个二重点，当且仅当

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{q+\varepsilon\sqrt{-3G}}{p} \quad (\varepsilon=\pm 1), \\ G<0; \end{cases} \tag{5.10}$$

(2) 一个尖点，当且仅当

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{q}{p}, \\ G=0; \end{cases} \tag{5.11}$$

(3) 两个拐点，当且仅当

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{q+\varepsilon\sqrt{G}}{p}, \\ G>0. \end{cases} \tag{5.12}$$

由于 (5.7) 和 (5.8) 右端项中的 Δ 不影响 (5.10), (5.11), (5.12) 中对应的参数 t_s, 我们不妨假定 $\Delta<0$.

现在我们将讨论 $p\neq 0$ 和 $p=0$ 的两种情况.

一、$p\neq 0$.

(1) 二重点.

曲线段 $t\in(0,1)$ 上要有一个二重点的充要条件是

$$\begin{cases} 0<\dfrac{q+\varepsilon\sqrt{-3G}}{p}<1, \\ G<0. \end{cases} \tag{5.13}$$

(a) 在 $p>0$ 时, (5.13)等价于

$$\begin{cases} q+\sqrt{-3G}<p, \\ q-\sqrt{-3G}>0, \\ G<0. \end{cases}$$

有理化以后,
$$\begin{cases} p^2+4q^2-2pq-6pr>0, \\ 2q^2-3pr>0, \\ p>q>0, \\ G<0. \end{cases}$$

把(5.7)代入上式, 得到

$$\begin{cases} \lambda(\mu^2-3\mu+\lambda)>0, \\ \mu(\lambda^2-3\lambda+\mu)>0, \\ \mu(\lambda-2)>0, \\ \lambda(\mu-2)>0, \\ G<0. \end{cases}$$

这里必须指出, 抛物线 $\mu^2-3\mu+\lambda=0$ 和 $\lambda^2-3\lambda+\mu=0$ 只相交于两个实点: (0, 0)和(2, 2), 而且 $p=0$ 表示双曲线$(\lambda-1)(\mu-1)=1$ 的两支, 它的顶点为(0, 0) 和 (2, 2)(参见图 10). 因此, 立即得到结论: D_1 有二重点, N_3 无二重点.

(b) 在 $p<0$ 时, 类似地得到

$$\begin{cases} \lambda(\mu^2-3\mu+\lambda)>0, \\ \mu(\lambda^2-3\lambda+\mu)>0, \\ \mu(\lambda-2)<0, \\ \lambda(\mu-2)<0, \\ G<0. \end{cases}$$

所以 D_2、D_4 有二重点, N_1、N_2、N_4 无二重点.

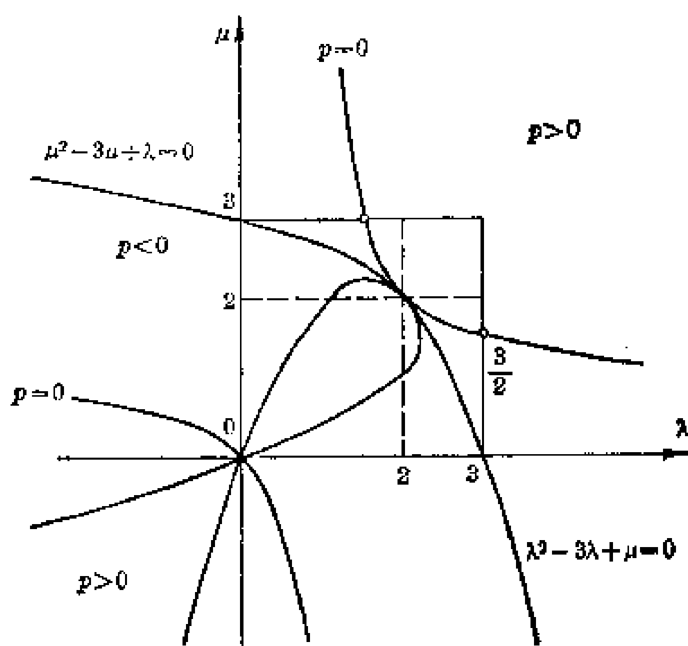


图 10

(2) 尖点.

曲线段 $t\in(0,\ 1)$ 上要有一个尖点的充要条件是

$$\begin{cases} 0<\dfrac{q}{p}<1, \\ G=0. \end{cases} \tag{5.14}$$

(a) 在 $p>0$ 时,利用(5.7)改写上式:

$$\begin{cases} \mu(\lambda-2)>0, \\ \lambda(\mu-2)>0, \\ G=0. \end{cases}$$

所以 C_1 有尖点.

(b) 在 $p<0$ 时,类似地得到

$$\begin{cases} \mu(\lambda-2)<0, \\ \lambda(\mu-2)<0, \\ G=0. \end{cases}$$

所以 C_2 和 C_4 有尖点, C_0 无尖点.

(3) 拐点.

我们从(5.5)和(5.6)容易算出端点曲率:

$$\begin{cases} k_0=\dfrac{[\boldsymbol{P}'(0)\boldsymbol{P}''(0)]}{|\boldsymbol{P}'(0)|^3}=\operatorname{sign}(\lambda)\dfrac{3-\mu}{\lambda^2}\cdot\dfrac{4\Delta}{|\overrightarrow{M_0M}|^3}, \\ k_1=\dfrac{[\boldsymbol{P}'(1)\boldsymbol{P}''(1)]}{|\boldsymbol{P}'(1)|^3}=\operatorname{sign}(\mu)\dfrac{3-\lambda}{\mu^2}\cdot\dfrac{4\Delta}{|\overrightarrow{MM_1}|^3}. \end{cases}$$

所以 $k_0k_1<0$ 等价于 $\lambda\mu(3-\lambda)(3-\mu)<0$. 由此可见, S_1、S_2、S_3、S_4 是具有一个拐点的区域的全体.

曲线段 $t\in(0,1)$ 上具有两个拐点的充要条件是:

$$\begin{cases} 0<\dfrac{q+\varepsilon\sqrt{G}}{p}<1, \\ G>0. \end{cases} \tag{5.15}$$

(a) 在 $p>0$ 时, 上式等价于

$$\begin{cases} p-q>\sqrt{G}, \\ q>\sqrt{G}, \\ G>0. \end{cases}$$

经过有理化并按照(5.7)改写,

$$\begin{cases} \mu(\lambda-3)>0, \\ \lambda(\mu-3)>0, \\ \mu(\lambda-2)>0, \\ \lambda(\mu-2)>0, \\ G>0. \end{cases} \tag{5.16}$$

所以 B_1 有两个拐点.

(b) 在 $p<0$ 时, 类似地得到

$$\begin{cases} \mu(\lambda-3)<0, \\ \lambda(\mu-3)<0, \\ \mu(\lambda-2)<0, \\ \lambda(\mu-2)<0, \\ G>0. \end{cases} \tag{5.17}$$

由此可见, B_2 和 B_4 都具有两个拐点.

我们再说明 N_1 无拐点. 实际上, 在 $p>0$ 时, 由 (5.16) 可见,

$\lambda>3$, $\mu>3$ 和 N_1 三者之交是空集. 在 $p<0$ 时, 由 (5.17) 可见, $\lambda<2$, $\mu<2$ 和 N_1 中 $G>0$ 的部分之交也是空集.

二、$p=0$ 时.

这时曲线上无奇点, 只有一个拐点, 对应的参数是

$$t=\frac{r}{q}. \tag{5.18}$$

因此, 曲线段 $t\in(0, 1)$ 上具有一个拐点的充要条件是

$$0<\frac{3-\mu}{3(2-\mu)}<1,$$

即 $\mu<\frac{3}{2}$ 或 $\mu>3$. 而 $p=0$ 代表了图 10 中标出的双曲线, 于是得到结论: 当 $p=0$ 时, 在 N_1 中无奇点和拐点, 在 S_1、S_2、S_3、S_4 中有一个拐点.

综上所述, 得到三次参数曲线段(5.4)的奇点和拐点的分布定理如下:

定理

$$(\lambda, \mu)\in\begin{cases} N_1、N_2、N_3、N_4, & \text{曲线段上无奇点和拐点;}\\ S_1、S_2、S_3、S_4, & \text{曲线段上有一个拐点;}\\ D_1、D_2、D_4, & \text{曲线段上有一个二重点;}\\ C_1、C_2、C_4, & \text{曲线段上有一个尖点;}\\ B_1、B_2、B_4, & \text{曲线段上有两个拐点.}\end{cases}$$

当三次参数曲线段的两个端点和端点处两条切向量给定时, 曲线段就唯一决定. 但是在不改变端点切线的前提下, 调整端点切向量的长度, 即调整 (λ, μ), 对于控制曲线段的形状有着重要作用. 这个定理给出了一个调整和控制的方法. 图 11 示意了对应于一部分(λ, μ)的曲线段(5.4)的分布情况.

最后对于 $\Delta=0$ 这个例外情况简述一下. 这时或者两条端点切向量平行, 或者其中之一与弦 $\boldsymbol{L}$ 平行(如果两者都与 $\boldsymbol{L}$ 相平行, 曲线段(5.4)变为平凡的直线段). 沿用前面的讨论方法, 我们得到曲线段(5.4)的拐点和奇点分布情形如下:

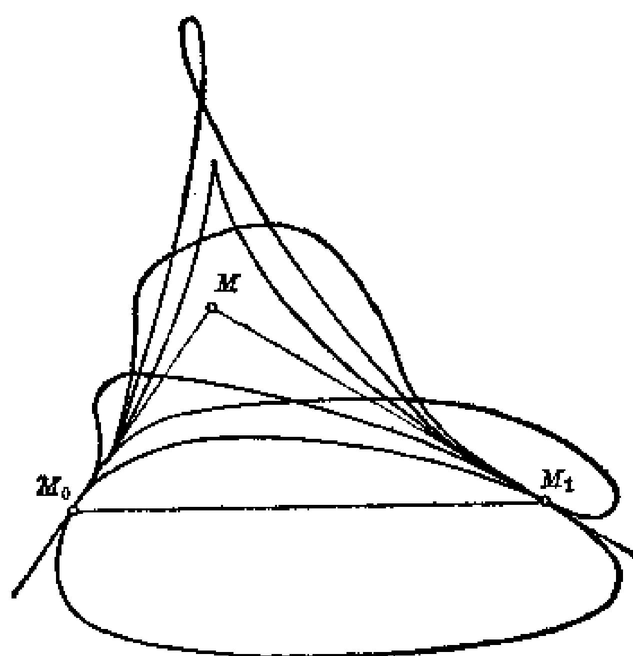


图 11

(1) 当 $\boldsymbol{A}_0 /\!/ \boldsymbol{A}_1$ 时,

$\begin{cases}\text{若 } \boldsymbol{A}_0 \text{ 和 } \boldsymbol{A}_1 \text{ 同向,则曲线段上有一个拐点;} \\ \text{若 } \boldsymbol{A}_0 \text{ 和 } \boldsymbol{A}_1 \text{ 反向,则曲线段上无奇点和拐点.}\end{cases}$

(2) 当 $\boldsymbol{A}_1 /\!/ \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{A}_0 \not\parallel \boldsymbol{L}$ 时,

设 $\boldsymbol{A}_1 = \mu \boldsymbol{L}$, 则

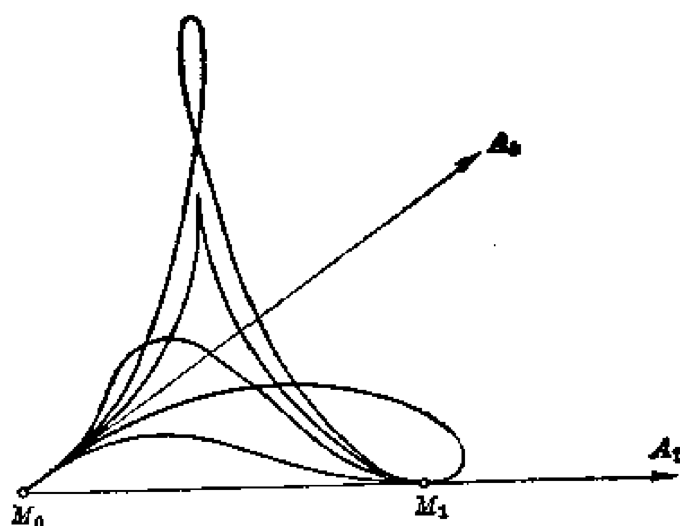


图 12

$$\text{曲线段上}\begin{cases}\text{无奇点和拐点}, & \text{当 } \mu\leqslant 0;\\ \text{有一个拐点}, & \text{当 } 0<\mu\leqslant 3;\\ \text{有两个拐点}, & \text{当 } 3<\mu<4;\\ \text{有一个尖点}, & \text{当 } \mu=4;\\ \text{有一个二重点}, & \text{当 } \mu>4.\end{cases}$$

相应的各种曲线段见于示意图 12.

三次参数曲线段的形状控制方法，同样可以应用于三次 Bézier 曲线的形状控制，详细情况将在第四章 2.4 段叙述.

§6 累加弦长三次参数样条曲线

上面几节介绍了三次参数曲线和三次参数曲线段的一般理论. 在这个基础上，我们将构造几种适用于不同场合的三次参数样条曲线.

在直角坐标平面上给定 $n+1$ 个型值点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$. 记相邻两个型值点之间的弦长为

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

我们将以下述方式构造三次参数样条曲线: 取参数轴 t 上的一个分割 Δ: $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 其中 $t_i=\sum\limits_{j=1}^{i} l_j$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. t 轴上的每个节点 t_i 具有累加弦长的几何意义. 对于这个分割 Δ, 分别以 x_i 和 $y_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 为插值数据，我们首先构造两个插值三次样条函数 $x(t)$ 和 $y(t)$, 然后把它们合并起来，而称参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)=(x(t), y(t))$ 为**累加弦长三次参数样条曲线**. 在节点处每个分量达到 C^2 连续，从而样条曲线达到切线和曲率连续.

这是一种最早使用的大挠度样条曲线. 为什么取累加弦长 t_i 作为参数轴上的分割节点呢？原始的设想是，这样一来，无论 $\left|\dfrac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right|$ 或 $\left|\dfrac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right|$ 都小于 1. 于是，不论在 (x, y) 平面上曲线

的挠度如何，在每个分量所属的(x, t)和(y, t)平面上都能保证小挠度. 其次，我们在§2中已经证明代数参数曲线不可能取弧长作为参数. 然而，当型值点相当密时，弦长近似于曲线的弧长，t就近似等于曲线的弧长参数，给参数t赋与几何意义. 由此希望参数样条具有良好的性能.

当然，以上所述仅仅是在作形式上的解释，是期望，而不是论证.

实践表明，累加弦长三次参数样条曲线对于大挠度曲线的拟合效果是令人满意的. 例如，在§1中提到的某海轮肋骨线计算实例中，如果用累加弦长三次参数样条曲线进行插值，求得各型值点处的曲率值为

k	0.500	0.469	0.496	0.449	0.497	0.479	0.481	0.473

和转轴45°后求得的小挠度三次样条函数在型值点处的曲率非常接近，相对误差不超过5%. 从下表看出，内插结果更加接近.

转轴45°后的小挠度三次样条函数		累加弦长三次参数样条曲线	
x	y	x	y
8.2547	0.0830	8.255	0.083
8.3844	0.0968	8.384	0.097
8.5141	0.1186	8.514	0.119
8.6437	0.1486	8.644	0.149
8.7734	0.1878	8.773	0.188
8.9031	0.2367	8.903	0.237
9.0328	0.2960	9.033	0.296
9.1625	0.3664	9.163	0.367
9.2922	0.4495	9.292	0.450
9.4219	0.5468	9.422	0.547
9.5516	0.6605	9.552	0.661
9.6813	0.7951	9.681	0.795
9.8109	0.9589	9.811	0.959
9.9406	1.1657	9.941	1.166
10.0703	1.4486	10.070	1.450

累加弦长三次参数样条曲线的想法朴素自然，插值效果良好，计算简单可靠，它的计算量相当于两遍三次样条函数，因此应用极多．特别是，它很容易推广到空间曲线的插值，只须增加一个 z 分量．目前大量应用于 Coons 曲面的网格曲线插值上，并由此获得孔斯曲面片的角点信息矩阵．详见第五章关于曲面的论述．

然而，关于这类参数样条，一直缺乏理论上的分析研究．从应用的角度考虑，至少下列几个问题是应该得到回答的：

(1) 是否具有几何不变性？

(2) 有没有力学背景？光顺性怎么样？

(3) 奇点和多余拐点如何鉴别？

我们在§3中运用了参数曲线的仿射不变量理论，作了判别多余拐点的讨论．这里将继续这方面的研究．

首先，把累加弦长三次参数样条曲线方程写成向量形式．设在相邻两个型值点 P_{i-1} 和 P_i 之间第 i 段曲线方程为

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{R}_3t^3+\boldsymbol{R}_2t^2+\boldsymbol{R}_1t+\boldsymbol{R}_0,\quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i, \tag{6.1}$$

其中弦长 $l_i=\overline{P_{i-1}P_i}$，参数轴上的节点坐标 $t_i=\sum\limits_{j=1}^{i}l_j$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

相邻两段曲线在型值点 P_i 处保持一阶和二阶导向量连续，并且分别记为 $\boldsymbol{m}_i$ 和 $\boldsymbol{M}_i$：

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}'(t_i-0)=\boldsymbol{P}'(t_i+0)\equiv\boldsymbol{m}_i,\\ \boldsymbol{P}''(t_i-0)=\boldsymbol{P}''(t_i+0)\equiv\boldsymbol{M}_i.\end{cases} \tag{6.2}$$

同三次样条函数相仿，我们利用各型值点 P_i 处的一阶导向量 $\boldsymbol{m}_i$ 和二阶导向量 $\boldsymbol{M}_i$ 之间的关系式

$$\begin{cases}l_i\boldsymbol{M}_i=-2(3\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{m}_{i-1}-2\boldsymbol{m}_i),\\ l_{i+1}\boldsymbol{M}_i=2(3\boldsymbol{e}_{i+1}-2\boldsymbol{m}_i-\boldsymbol{m}_{i+1}),\end{cases} \tag{6.3}$$

就得到 $\boldsymbol{m}$ 连续性方程

$$\lambda_i\boldsymbol{m}_{i-1}+2\boldsymbol{m}_i+\mu_i\boldsymbol{m}_{i+1}=3(\lambda_i\boldsymbol{e}_i+\mu_i\boldsymbol{e}_{i+1})\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{6.4}$$

式中记 $\lambda_i=\dfrac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{l_i}{l_i+l_{i+1}}$, $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{l_i}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ 表示相邻两型值点 P_{i-1} 和 P_i 所连弦方向上的单位向量.

相应地, 我们有 **$\boldsymbol{M}$ 连续性方程**

$$\mu_i\boldsymbol{M}_{i-1}+2\boldsymbol{M}_i+\lambda_i\boldsymbol{M}_{i+1}=6\frac{\boldsymbol{e}_{i+1}-\boldsymbol{e}_i}{l_i+l_{i+1}}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{6.5}$$

连续性方程 (6.4) 或 (6.5) 被添上两个适当的边界条件后, 构成了完整的连续性方程. 在实际问题中, 对边界切向容易估计, 而对边界切向量长度则往往难以判断, 究竟取多少为好? 我们建议, 边界切向量总是取成单位向量为妥, 即 $|\boldsymbol{m}_0|=|\boldsymbol{m}_n|=1$. 从下面的讨论将会看出, 这种取法将是有助于保证样条曲线的光顺性.

我们建议使用如下形式的**插值公式**: 在点 P_{i-1} 与 P_i 之间的第 i 段曲线方程定为

$$\boldsymbol{P}(t)=[1,\ (t-t_{i-1}),\ (t-t_{i-1})^2,\ (t-t_{i-1})^3]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_0\\ \boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}_i$$

$$(t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i;\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

这里

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_0\\ \boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}_i=[A]_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i-1}\\ \boldsymbol{P}_i\\ \boldsymbol{m}_{i-1}\\ \boldsymbol{m}_i\end{bmatrix}=[B]_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i-1}\\ \boldsymbol{P}_i\\ \boldsymbol{M}_{i-1}\\ \boldsymbol{M}_i\end{bmatrix},$$

式中矩阵 $[A]_i$ 和 $[B]_i$ 就是第二章的 (1.25) 和 (1.26), 仅将那里的 h_i 改成 l_i. $\boldsymbol{P}_i$ 表示型值点 $P_i(x_i,\ y_i)$ 的位置向量 $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$, 我们将常常不加区分地通用这两种符号.

这样, 通过解完整的连续性方程及插值公式, 我们便唯一地确定样条曲线. 而在连续性方程及插值公式中出现的, 仅仅是有关型值点 P_i 的位置向量和弦长 l_i 这样一些几何量, 它们不依赖于坐

标系的选择. 这就说明了，累加弦长三次参数样条曲线具有几何不变性(严格讲，是度量不变性). 这是第一个问题的回答. 在本书中，我们常常称那些具有几何不变性的样条为**样条曲线**，而称那些依赖于坐标系选择的样条为**样条函数**.

以上的讨论对于空间情形也同样适用. 但是下面的论述则仅限于平面的场合.

为了讨论第二个问题，我们对连续性方程作线性化处理. 将 m 连续性方程 (6.4) 分解到 $\boldsymbol{e}_{i+1}$ 和它的法方向上，于是得到分量表示式

$$\begin{cases} \lambda_i m_{i-1}\cos(\theta_{i-1}-\varphi_i)+2m_i\cos\theta_i \\ \quad +\mu_i m_{i+1}\cos(\theta_{i+1}+\varphi_{i+1})=3(\lambda_i\cos\varphi_i+\mu_i), \\ \lambda_i m_{i-1}\sin(\theta_{i-1}-\varphi_i)+2m_i\sin\theta_i \\ \quad +\mu_i m_{i+1}\sin(\theta_{i+1}+\varphi_{i+1})=-3\lambda_i\sin\varphi_i \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \end{cases} \tag{6.6}$$

式中记 $m_i=|\boldsymbol{m}_i|$，$\boldsymbol{e}_{i+1}$ 同 $\boldsymbol{m}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_i$ 的夹角依次记为 θ_i 和 φ_i，它们都是有向角，逆时针方向为负(图 13).

我们对(6.6)作线性化，而为此将式中的三角函数展开为幂级数并取其主部，因此得到

$$\begin{cases} \lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=3+0(\varphi^2), \\ \lambda_i m_{i-1}\theta_{i-1}+2m_i\theta_i+\mu_i m_{i+1}\theta_{i+1} \\ \quad =-\lambda_i(3-m_{i-1})\varphi_i-\mu_i m_{i+1}\varphi_{i+1}+0(\varphi^3) \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \end{cases} \tag{6.7}$$

式中记 $\varphi=\max\limits_i|\varphi_i|$.

由于边界条件是 $m_0=m_n=1$，$(6.7)_1$ 的解具有形式

$$m_i=1+0(\varphi^2), \tag{6.8}$$

当 φ 为小量时(实用上，只要 $\varphi\leqslant 30°$)，我们称样条是**局部小挠度**. (6.8) 表明，在忽略 $0(\varphi^2)$ 的意义下，局部小挠度样条在每个型值点 P_i 处的切向量 $\boldsymbol{m}_i$ 都是单位向量.

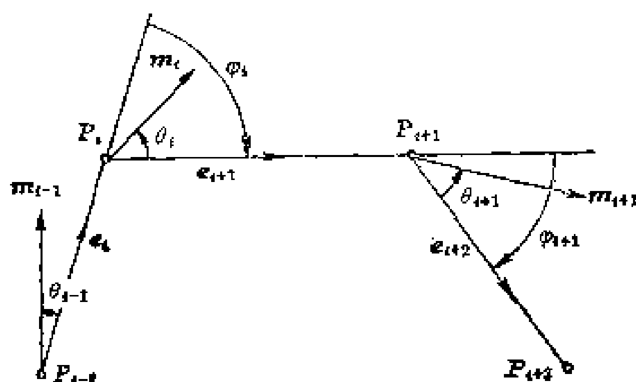


图 13

于是，$(6.6)_2$ 成为所谓 **θ 连续性方程**：

$$\lambda_i\theta_{i-1}+2\theta_i+\mu_i\theta_{i+1}=-2\lambda_i\varphi_i-\mu_i\varphi_{i+1}+0(\varphi^3)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \tag{6.9}$$

这些方程反映了切线同弦线的夹角 θ_i 所满足的关系式.

用 $\boldsymbol{m}_i$ 边边叉乘(6.3)式，利用(6.8)，并注意有向角 θ_i 和 φ_i 的指向，我们得到

$$\begin{cases} l_i k_i=2(2\varphi_i+\theta_{i-1}+2\theta_i)+0(\varphi^3), \\ l_{i+1}k_i=-2(\varphi_{i+1}+2\theta_i+\theta_{i+1})+0(\varphi^3), \end{cases} \tag{6.10}$$

式中 k_i 是样条曲线在型值点 P_i 处的曲率. 将第二式的指标 i 换成 $i-1$，与第一式联立，便可解得

$$\begin{cases} \theta_{i-1}=-\dfrac{l_i}{6}(2k_{i-1}+k_i)+0(\varphi^3), \\ \theta_i=\dfrac{l_i}{6}(k_{i-1}+2k_i)-\varphi_i+0(\varphi^3). \end{cases} \tag{6.11}$$

再把$(6.11)_1$的指标 i 换成 $i+1$，(6.11)两式的左手项相同，于是我们有

$$\mu_i k_{i-1}+2k_i+\lambda_i k_{i+1}=3K_i+0(\varphi^2)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{6.12}$$

式中 K_i 是过相邻三个型值点 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 所作圆的曲率，称为**圆率**. 事实上圆率 $K_i\doteq\dfrac{2\varphi_i}{l_i+l_{i+1}}+0(\varphi_i^2)$. (6.12) 称为 **$k$ 连续性方程**. 在以后，当论述到木样条的严格的数学模型时，将证明其 k

连续性方程与(6.12)相同，它们的差别仅在 $0(\varphi^2)$ 项中．这表明，样条在型值点处的曲率对于木样条的逼近程度为 $0(\varphi^2)$，由此得知曲线的逼近程度为 $0(\varphi^4)$．这件事情从理论上保证了累加弦长三次参数样条曲线的光顺性，它的力学背景就是木样条．这是第二个问题的答案．

为了讨论第三个问题，对样条的每一曲线段作参数的规范化变换．第 i 段的变换式是 $T=\frac{t-t_{i-1}}{l_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$．于是每一段的新参数 $T\in[0, 1]$．把第 i 段曲线的两个端点关于新参数 T 的切向量记为 $\boldsymbol{A}_{i0}$ 和 $\boldsymbol{A}_{i1}$．那末，

$$\boldsymbol{A}_{i0}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dT}\bigg|_{T=0}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\bigg|_{t=t_{i-1}}\frac{dt}{dT}=l_i\boldsymbol{m}_{i-1}.$$

同样有 $\boldsymbol{A}_{i1}=l_i\boldsymbol{m}_i$．分别把 $\boldsymbol{e}_i$ 同 $\boldsymbol{A}_{i0}$ 和 $\boldsymbol{A}_{i1}$ 所夹的有向角记为 θ_{i-1} 和 θ_i^*(图 14)，并且如前所述，取定边界切向量长度 $m_0=m_n=1$．

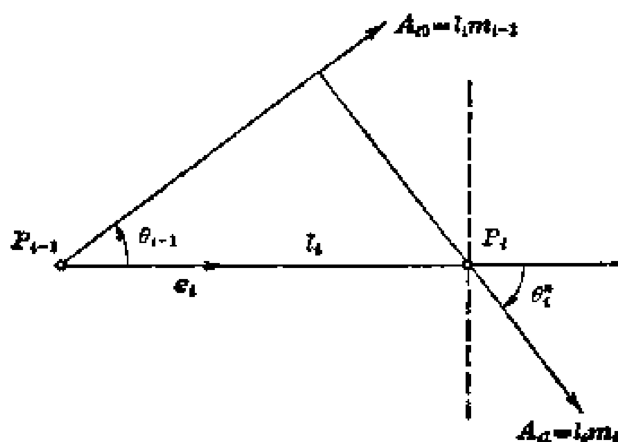


图 14

对第三个问题的回答是

定理 若

$$|\theta_{i-1}|+|\theta_i^*|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(i=1, 2, \cdots, n), \tag{6.13}$$

则累加弦长三次参数样条曲线上不存在奇点或两个拐点．

证明 由于(6.13)，每相邻两条切向量 $\boldsymbol{m}_{i-1}$ 与 $\boldsymbol{m}_i$ 之间的夹

角不大于 $\frac{\pi}{2}$. 从 (6.4) 我们有

$$|2m_i| \leqslant |(\lambda_i m_{i-1}+\mu_i m_{i+1})+2m_i| = 3|\lambda_i e_i+\mu_i e_{i+1}| \leqslant 3$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

因此
$$m_i \leqslant \frac{3}{2} \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

由此可见,第 i 段曲线的端点切向量长度

$$|A_{i0}|,\ |A_{i1}| \leqslant \frac{3}{2} l_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{6.14}$$

又把第 i 段端点切向量的相对长度记为 λ_i 和 μ_i (注意，它们并不是样条函数连续性方程中的系数 λ_i 和 μ_i)，并在不失一般性之下，假定 $\theta_{i-1}>0$. 现在我们将按 § 5 的定理，分作五种情形来讨论:

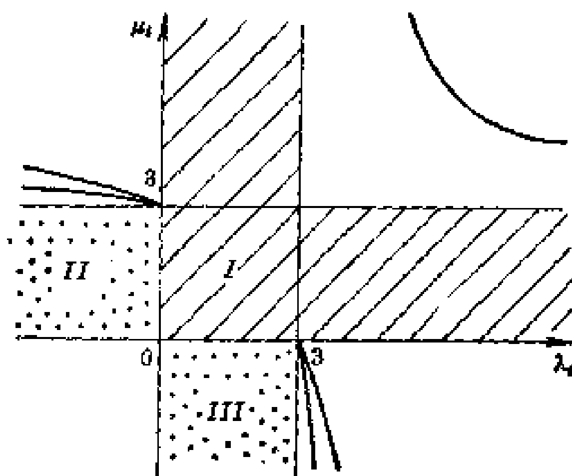


图　15

(1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_i^* < 0$.

此时

$$\lambda_i,\ \mu_i > 0.$$

从 (6.14) 有 $\min(\lambda_i,\ \mu_i) < 3$.

因此 $(\lambda_i,\ \mu_i) \in$ 区域 I (如图 15). 这时，第 i 曲线段上至多只有一个拐点,而无奇点.

(2) $0 < \theta_i^* < \theta_{i-1}$.

这时，
$$\begin{cases} \lambda_i < 0, \\ 0 < \mu_i < 3, \end{cases}$$

所以 $(\lambda_i,\ \mu_i) \in$ 区域 II. 这时,第 i 曲线段上有一个拐点，而无奇点.

(3) $\theta_{i-1} < \theta_i^* \leqslant \frac{\pi}{2}$.

我们有
$$\begin{cases} 0 < \lambda_i < 3, \\ \mu_i < 3, \end{cases}$$

从而 $(\lambda_i, \mu_i)\in$ 区域 III. 第 i 曲线段上有一个拐点，而无奇点。

(4) $\theta_i^*=\theta_{i-1}$.

这时有一个拐点，而无奇点.

(5) $\theta_i^*=0$.

此时也有一个拐点，而无奇点.

从(6.13)得知 $\theta_i^*\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，所以这五种情况是完备的，因而定理得证.

为了使样条曲线上避免出现奇点和两个拐点，附加限制式(6.13)是一个比较实用的充分条件. 在数学放样和外形设计问题中，经常遇到的都是局部小挠度情形，(6.13) 总能满足. 一般而言，当这个条件取消时，样条曲线也有可能出现奇点或两个拐点.

我们举例来说明. 如图 16 所示，平面上给定三个型值点 P_0, P_1 和 P_2. 设 $l_1=l_2=1$, $\angle P_0P_1P_2=120°$. 设边界切向量 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_1$ 是单位向量，$\boldsymbol{m}_2=-\boldsymbol{m}_0$，而且 $\boldsymbol{m}_2$ 与 $\overrightarrow{P_0P_2}$ 的夹角为 α. 从连续性方程解出 $\boldsymbol{m}_1=\frac{3}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，于是 $m_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1.299$.

P_0 和 P_1 之间的第一段曲线在各端点的切向量的相对长度分别是

$$\begin{cases} \lambda_1=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2\sin\alpha}}=-2\sin\alpha, \\ \mu_1=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\alpha)}. \end{cases}$$

(1) 当取 $\alpha=46°$ 时，

$$\begin{cases} \lambda_1\approx -1.438, \\ \mu_1=\dfrac{3\times 1.732}{2(1.732-0.966)}\approx 3.40. \end{cases}$$

从 § 5 的定理得知 $(\lambda_1, \mu_1)\in$ 二重点区域. 此时第一段曲线上有

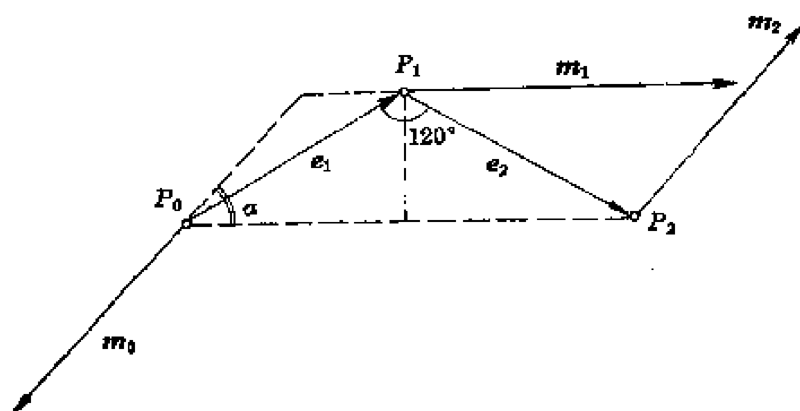


图 16

一个二重点.

(2) 当取 $\alpha=47°$ 时,

$$\begin{cases}\lambda_1\approx-1.462,\\ \mu_1=\dfrac{3\times1.732}{2(1.732-0.933)}\approx3.24.\end{cases}$$

因此, $(\lambda_1,\mu_1)\in$两个拐点区域, 第一段曲线上有两个拐点.

图 17 是上述两种情况的示意图.

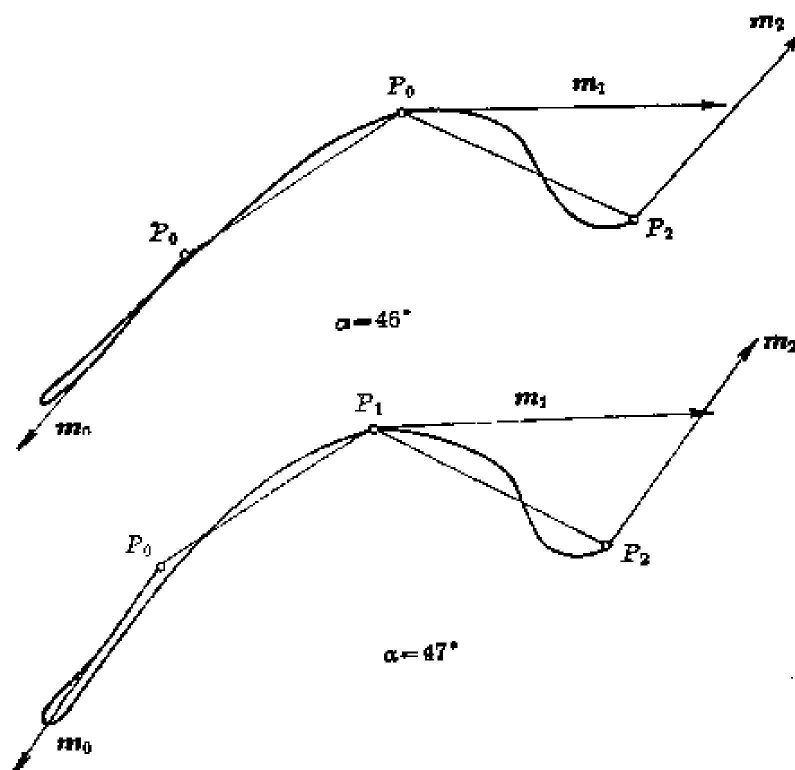


图 17

§7 各种连接条件下的三次参数样条曲线

7.1 连接条件

在这一节我们将讨论以三次参数曲线段 $\boldsymbol{P}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 作为"零件",而把它们连接"装配"起来使成为一根样条,这时间有哪几种可行的方案？ 从实际应用来看,在连接处达到 C^2 连续是必要的. 参数曲线段的 C^2 连续是指相邻两段在连接处的位置、切向和曲率的连续. 上一节的累加弦长三次参数样条曲线当然是 C^2 连续,因为在连接处已经达到关于累加弦长参数的一阶和二阶导向量的连续.

给定两条参数曲线段 $\boldsymbol{P}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{P}_2(t)$, $t\in[0, 1]$ 时,我们把第一段的尾 $(t=1)$ 和第二段的首 $(t=0)$ 连接起来,使之达到 C^2 连续;而为此得出如下的充要条件:

定理 为了连接两条参数曲线段 $\boldsymbol{P}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{P}_2(t)$, $t\in[0, 1]$, 使之达到 C^2 连续,充要条件是:存在任意常数 $\alpha(>0)$ 和 β, 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_1(1)=\boldsymbol{P}_2(0),\\ \boldsymbol{P}_1'(1)=\alpha\boldsymbol{P}_2'(0),\\ \boldsymbol{P}_1''(1)=\alpha^2\boldsymbol{P}_2''(0)+\beta\boldsymbol{P}_2'(0).\end{cases}\tag{7.1}$$

证明 先证必要性. 设 $\boldsymbol{P}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{P}_2(t)$ 在连接处的位置和切向都是连续的,那末(7.1)的第一、二式成立,并且 $\alpha>0$.

(1) 假定 $\boldsymbol{P}_2'(0)\nparallel\boldsymbol{P}_2''(0)$. 如图 18 所示,存在常数 β 和 γ 使得

$$\boldsymbol{P}_1''(1)=\beta\boldsymbol{P}_2'(0)+\gamma\boldsymbol{P}_2''(0).$$

可是第一段曲线在连接处的曲率

$$k_1=\frac{[\boldsymbol{P}_1'(1)\times\boldsymbol{P}_1''(1)]}{|\boldsymbol{P}_1'(1)|^3}=\frac{[\alpha\boldsymbol{P}_2'(0)\times(\beta\boldsymbol{P}_2'(0)+\gamma\boldsymbol{P}_2''(0))]}{\alpha^3|\boldsymbol{P}_2'(0)|^3}$$

$$=\frac{\gamma[\boldsymbol{P}_2'(0)\times\boldsymbol{P}_2''(0)]}{\alpha^2|\boldsymbol{P}_2'(0)|^3}=\frac{\gamma}{\alpha^2}k_2.$$

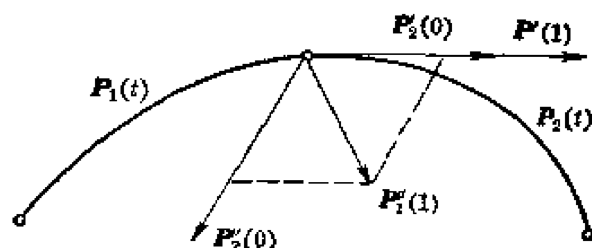


图 18

而且两段曲线在连接处的曲率是连续的：$k_1=k_2$，所以 $\gamma=\alpha^2$．于是(7.1)的第三式成立．

(2) 假定 $\boldsymbol{P}_2'(0)\parallel\boldsymbol{P}_2''(0)$．此时 $k_2=0$．于是从 $k_1=k_2=0$，得到 $\boldsymbol{P}_1'(1)\parallel\boldsymbol{P}_1''(1)$．因此(7.1)的第三式也成立．

从参数曲线的曲率公式我们直接导出这些条件的充分性．这样定理得证．

如果把第 i 段曲线 $\boldsymbol{P}_i(t)$ 和第 $i+1$ 段曲线 $\boldsymbol{P}_{i+1}(t)$ 连接起来，我们便可看出：累加弦长三次参数样条曲线实际上就是 $\beta_i=0$，$\alpha_i=\dfrac{l_i}{l_{i+1}}$ 的场合．

(7.1) 表明，具有 C^2 连续条件的最一般参数样条曲线并不是唯一确定的，因为在每一个内型值点上有 α 和 β 两个自由度．只要适当调用这两个自由度，我们便可构造适合各种需要的样条曲线．

在计算几何中，Ferguson (1963) 最早使用了三次参数样条曲线，因此 Bézier 称这种曲线段为 **Ferguson 曲线**．这种方法是发展美国波音飞机公司的 FMILL 系统的基础．它所采用的 $\alpha=1$，$\beta=0$ 这样一种最简单的连接办法，只适用于均匀型值点间隔 l_i 的场合，而且我们必须适当选择坐标系的度量单位，使得所有的 $l_i\approx1$．当间隔 l_i 极不均匀时，样条曲线上就会出现很坏的效果，即：在 l_i 较大的一段，曲线相当扁平而靠近弦线；在 l_i 较短的一段，曲线段上可能出现两个拐点或者奇点．1967 年日本的穗坂衛主张使用 $\alpha_i=\dfrac{l_i}{l_{i+1}}$，也就是选取累加弦长参数来解决这个问题．

7.2 C^2 连续的保形插值三次参数样条曲线

在计算几何中，我们有时候会遇到这样一类插值问题：在平面上给定一列有序点列 $P_i(i=0, 1, \cdots, n)$，要找一条插值曲线，使点列的"形状"得到保持．这里"保持形状"的意思是：把每相邻两个型值点用直线段连起来组成多边形，在多边形凸的地方，希望相应的样条曲线段上不出现拐点，在多边形转折的地方，相应的曲线段上有一个拐点．当然，还要求每一段上不出现奇点．这就是**保形插值问题**．当多边形全部为凸时，就是**保凸插值问题**．近年来，对这一类问题的讨论大多是从函数逼近论角度进行的，除了保凸插值外还有保单调插值．必须指出，构造 C^2 连续的保形插值函数往往是相当复杂费事的．

如果放弃插值条件，而仅仅要求保形逼近，那末在下一章所研究的 Bézier 曲线和 B 样条曲线便是一种有效的工具．

如果降低连续性，问题会容易些．很明显，C^0 连续的保形插值问题的解就是连接相邻型值点的多边形．对 C^1 连续的保形插值我们可以这样构造：在每个型值点处用某种方法指定一条切线后，对于每一段来讲，这就是 Hermite 插值问题．以后将要介绍的双圆弧样条曲线就是一种实用的 C^1 连续保形插值．

累加弦长三次参数样条曲线是 C^2 连续，可是并不是保凸．张力样条是 C^2 连续而且保凸插值，然而它在每段只有一个张力参数，自由度太少．而且当这些张力参数取得相当大时，张力样条将逼近弦线多边形．这一点使得它在某些应用中缺乏灵活性．

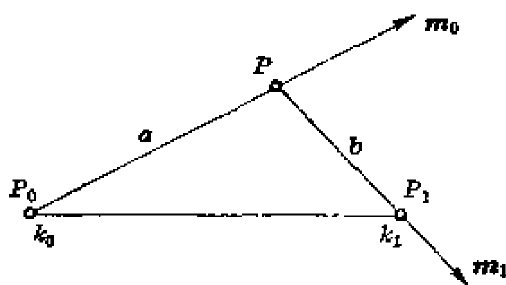


图 19

在一些问题中，我们往往需要有更多的自由度．例如，希望每个型值点处的切向和曲率在

一定的程度上能够自由指定．就样条的每一段而言，在函数逼近论中是这样一个 Hermite 插值问题：在每一段给定两端点处的函数值和一阶、二阶导数值．这样一来，插值函数必须是五次多项式．因此曲线段上可能出现多达三个的拐点，也就更难控制了．

我们在本节将用三次参数曲线段构造 C^2 连续的保形插值样条．如 7.1 中所提到的，我们将把连接时出现的两个自由度取作为每个型值点 P_i 处的切向和曲率，以提供更多的灵活性(刘鼎元[2]，1979)．

我们已经知道三次参数曲线段的端点曲率 k_0、k_1 同端点切向量 $\boldsymbol{m}_0$、$\boldsymbol{m}_1$ 的相对长度 λ、μ 之间的关系：

$$\begin{cases} k_0=\dfrac{4\Delta}{a^3}\,\dfrac{3-\mu}{\lambda^2}\,\mathrm{sign}(\lambda), \\ k_1=\dfrac{4\Delta}{b^3}\,\dfrac{3-\lambda}{\mu^2}\,\mathrm{sign}(\mu), \end{cases}$$

式中 a 和 b 代表图 19 中切线三角形 P_0PP_1 的两条边长．

$$\triangle=\frac{1}{2}[\overrightarrow{P_0P}\,\overrightarrow{PP_1}]$$

表示三角形 P_0PP_1 的有向面积．当 $\Delta\neq 0$ 时，上式可以改写成

$$\begin{cases} \mu=3-\mathrm{sign}(\lambda)A\lambda^2, \\ \lambda=3-\mathrm{sign}(\mu)B\mu^2, \end{cases} \tag{7.2}$$

式中

$$\begin{cases} A=\dfrac{a^3}{4\Delta}k_0, \\ B=\dfrac{b^3}{4\Delta}k_1. \end{cases} \tag{7.3}$$

在给定了切线三角形 P_0PP_1 和端点曲率 k_0、k_1 后，(7.2) 表示 (λ,μ) 平面上两条反称抛物线的交点的坐标．

构造样条曲线的步骤是：(1) 确定 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_1$ 的指向；(2) 指定 P_0 和 P_1 处的曲率 k_0 和 k_1；(3) 通过(7.2)式求出相对长度(λ,μ)．于是便完全确定了型值点处的切向量 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_1$．这样就决

定了样条的每一段.

如图 20 所示,在平面上给定一列型值点 $P_i(i=0, 1, \cdots, n)$. 图中的记号与 § 6 相同.

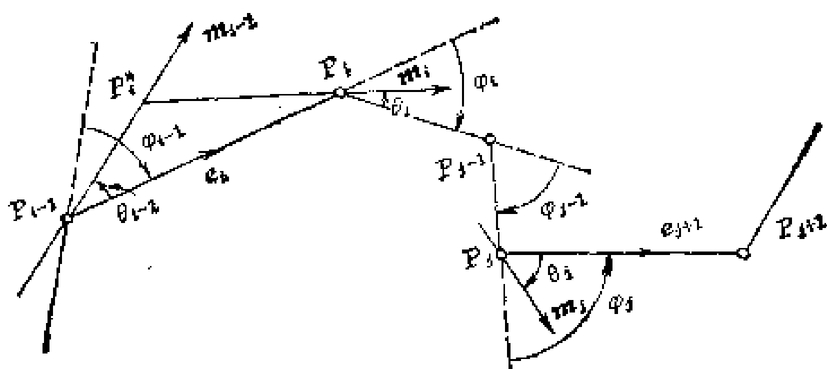


图 20

(1) 怎样决定曲线在每点 P_i 处的切向量 $\boldsymbol{m}_i$ 的指向?

$\boldsymbol{m}_i$ 的指向决定于系数 C_i, 其中 $0<C_i<1$, 而且

$$\theta_i=-C_i\varphi_i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{7.4}$$

我们指定 θ_0 和 θ_n, 用以决定曲线在边界处的切向量 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_n$.

(2) 怎样决定曲线在每点 P_i 处的曲率 k_i?

首先, 我们通过下列的准则来判别每一曲线段上有无拐点出现.

(i) 若 $\varphi_{i-1}\varphi_i>0$, 则第 i 段曲线上无拐点, 称为无拐段;

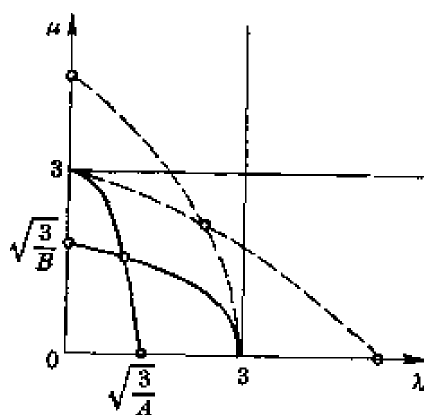


图 21

(ii) 若 $\varphi_{i-1}\varphi_i<0$, 则第 i 段曲线上有一个拐点, 称为有拐段.

要使第 i 段曲线上不出现奇点和多余拐点, 在这里我们将给出一个充分条件.

为了书写的简洁, 暂时略去指标 i, 并记曲线段的两端点为 P_0 和 P_1, 其余记号的意义如图 20 和 (7.2)、(7.3) 中所示. 现在按照各段有无拐点区分为两种情形讨论如下.

(i) 无拐段.

这时 k_0, k_1 和 Δ 同号. 从 (7.3), 得到 A, $B>0$. 于是 (7.2) 所表示的一对反称抛物线如图 21 所示. 从样条曲线的光顺性考虑, 我们仅仅取 (7.2) 在 λ, $\mu>0$ 范围中的解.

先设 $\Delta>0$. 曲线 $(7.2)_1$ 与 λ 轴的交点坐标为 $\lambda=\sqrt{\frac{3}{A}}$; 曲线 $(7.2)_2$ 与 μ 轴的交点坐标为 $\mu=\sqrt{\frac{3}{B}}$. 容易看出, 当

$$\sqrt{\frac{3}{A}},\ \sqrt{\frac{3}{B}}<3$$

时, 也就是取

$$\begin{cases} k_0>\dfrac{4\Delta}{3a^3}, \\ k_1>\dfrac{4\Delta}{3b^3} \end{cases}$$

时, (7.2) 在 (λ, μ) 平面的第 I 象限中的解就是图 21 中两条实线抛物线的交点, 因此, 我们有且仅有一个解.

当 $\sqrt{\frac{3}{A}},\ \sqrt{\frac{3}{B}}>3$ 时, 即当

$$\begin{cases} k_0<\dfrac{4\Delta}{3a^3}, \\ k_1<\dfrac{4\Delta}{3b^3} \end{cases}$$

时, (7.2) 在 (λ, μ) 平面上第 I 象限中的解就是图 21 中两条虚线抛物线的交点, 它也是唯一解.

这两种情形的解都满足 $0<\lambda$, $\mu<3$, 在 (λ, μ) 平面上属于无奇点无拐点区域.

考虑到还有 $\Delta<0$ 的情形, 我们把上述关于 k_0 和 k_1 的限制修改成

$$\begin{cases} |k_0|>\dfrac{4|\Delta|}{3a^3}, \\ |k_1|>\dfrac{4|\Delta|}{3b^3} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} |k_0|<\dfrac{4|\Delta|}{3a^3}, \\ |k_1|<\dfrac{4|\Delta|}{3b^3}. \end{cases}$$

这就是在无拐段的情况下 k_0 和 k_1 的取值范围.

(ii) 有拐段.

这时 k_0 和 k_1 一定异号. 从(7.3), 得知 A 和 B 亦异号. 因此(7.2)的图形只有如图 22 所示的两种可能性.

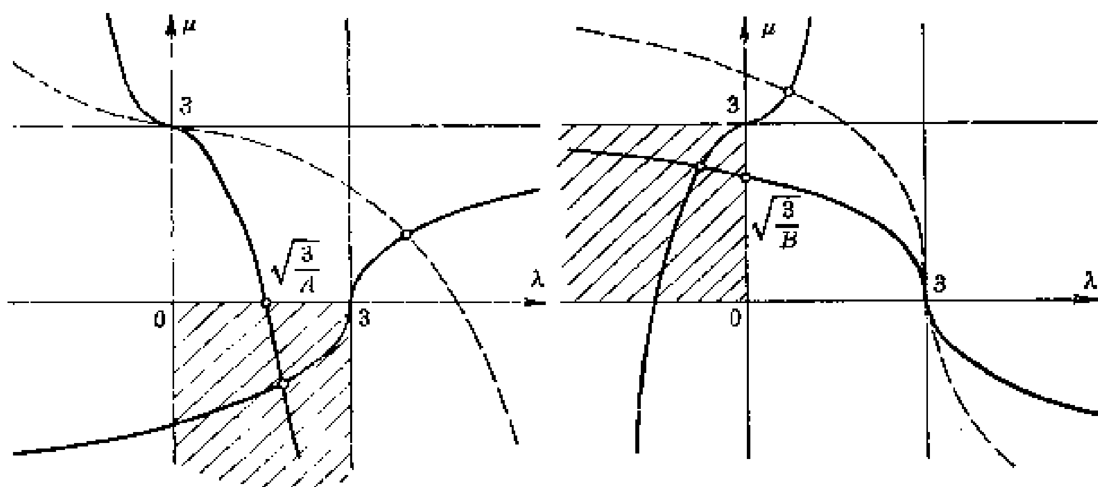


图 22

可见两条反称抛物线有唯一的交点, 并且一定落在 (λ, μ) 平面上的单个拐点区域中.

从样条曲线的光顺性出发来考虑有拐段的情况时, 我们应该采用 (7.2) 在 (λ, μ) 平面的第 II 或 IV 象限中的解, 即图 22 中的斜线区域中的交点. 这就要求 $\sqrt{\frac{3}{A}}<3$ 或 $\sqrt{\frac{3}{B}}<3$, 也就是取定

$$|k_0|>\frac{4|\Delta|}{3a^3}\quad 或\quad |k_1|>\frac{4|\Delta|}{3b^3}.$$

这就确定了 k_0 和 k_1 在有拐段的情况下的取值范围.

现在, 让我们回到原来讨论中去, 对各节点重新添上指标 i. 在第 i 段取定切线三角形 $P_{i-1}P_i^*P_i$(图 20), 把它的两条边长以及有向面积依次记为

$$a_i=|\overrightarrow{P_{i-1}P_i^*}|,\ b_i=|\overrightarrow{P_i^*P_i}|,\ \Delta_i=\frac{1}{2}[\overrightarrow{P_{i-1}P_i^*}\ \overrightarrow{P_i^*P_i}].$$

并且采用下列记号:

$$\begin{cases} k_{i-1}^{+}=\dfrac{4|\Delta_i|}{3a_i^3}, \\ k_i^{-}=\dfrac{4|\Delta_i|}{3b_i^3}, \\ k_0^{-}=k_n^{+}=0 \end{cases} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

综合起来，我们可以这样取定每点 P_i 处的曲率 k_i：

k_i 与 φ_i 同符号，

$$|k_i|>\max(k_i^{+},\ k_i^{-}) \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n), \tag{7.5}$$

其中 φ_0 和 φ_n 由边界条件给定.

(3) 最后，在取定了每点 P_i 处的 k_i 后，我们通过 (7.2) 的求解，便得到第 i 段曲线的端点切向量相对长度 λ_i 和 μ_i. 这样，第 i 段曲线就完全被确定下来了 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

7.3 用三次参数曲线段构造大挠度的张力样条曲线

我们在第二章 § 3 中介绍了张力样条函数，用以解决保凸插值问题. 那是在小挠度的假定下得出的结果. 相反，在大挠度的场合，从连续性方程(3.8)计算 F_i 时出现两个大数相减，因而整个张力样条函数的计算过程将是不稳定的. 而且，从保凸性条件(3.11) 中估计得到的张力参数 ρ_i 容易变得很大，于是这个方法便失去了实用的价值. 此外，张力样条函数是用指数函数表示的，计算要比代数多项式复杂.

在三次参数样条曲线的 C^2 连续条件(7.1)式中，有两个自由系数 α 和 β 尚待决定.

(1) 取所有的 $\alpha=1$, $\beta=0$, 所得到的是 Ferguson 形式的三次参数样条曲线；

(2) 取 $\alpha_i=\dfrac{l_i}{l_{i+1}}$, $\beta_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，便有累加弦长三次参数样条曲线；

(3) 取两个自由度作为 (7.4) 中的切向系数 C_i 和 (7.5) 的型

值点曲率$k_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，便有保形插值三次参数样条曲线.

第四种构造法：取$\alpha_i=\frac{l_i}{l_{i+1}}$，$\beta_i$作为张力参数$(i=1, 2, \cdots, n-1)$，我们就能构造那些适用于大挠度情况下$C^2$连续的张力样条曲线.

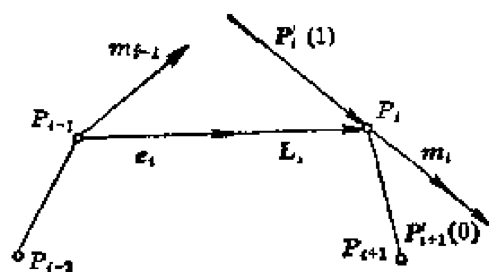


图 23

1° 连续性方程

设平面上给定了$n+1$个型值点$P_i(i=0, 1, \cdots, n)$. 在P_{i-1}与P_i之间的第i段三次参数曲线的向量表示式便可写成

$$\boldsymbol{P}_i(t)=\boldsymbol{P}_{i-1}+t^2(3-2t)\boldsymbol{L}_i+t(t-1)^2\boldsymbol{P}_i'(0)+t^2(t-1)\boldsymbol{P}_i'(1),\ 0\leqslant t\leqslant 1\quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{7.6}$$

式中弦向量$\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{i-1}$，弦长$l_i=|\boldsymbol{L}_i|$，弦方向上的单位向量$\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{l_i}\boldsymbol{L}_i$.

第i段和第$i+1$段参数曲线在P_i处达到C^2连续的充要条件是，存在系数η_i和$\xi_i(>0)$，使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_i'(1)=\xi_i\boldsymbol{P}_{i+1}'(0),\\ \boldsymbol{P}_i''(1)=\xi_i^2\boldsymbol{P}_{i+1}''(0)-\eta_i\boldsymbol{P}_i'(1)\end{cases}\quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{7.7}$$

三次参数曲线段(7.6)的一阶和二阶导向量之间满足一些同三次样条函数相类似的关系式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_i''(1)=-2[3\boldsymbol{L}_i-\boldsymbol{P}_i'(0)-2\boldsymbol{P}_i'(1)],\\ \boldsymbol{P}_{i+1}''(0)=2[3\boldsymbol{L}_{i+1}-2\boldsymbol{P}_{i+1}'(0)-\boldsymbol{P}_{i+1}'(1)]\end{cases}\quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{7.8}$$

把它们代入(7.7)，便得到方程

$$\boldsymbol{P}_i'(0)+\left[2\xi_i(\xi_i+1)+\frac{\xi_i\eta_i}{2}\right]\boldsymbol{P}_{i+1}'(0)+\xi_i^2\boldsymbol{P}_{i+1}'(1)=3(\boldsymbol{L}_i+\xi_i^2\boldsymbol{L}_{i+1})\quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{7.9}$$

取 $\xi_i=\dfrac{l_i}{l_{i+1}}$，并由于(7.7)$_1$，记向量

$$\boldsymbol{m}_i=\frac{1}{l_i}\boldsymbol{P}_i'(1)=\frac{1}{l_{i+1}}\boldsymbol{P}_{i+1}'(0)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

则上述方程可以写成

$$\lambda_i\boldsymbol{m}_{i-1}+\rho_i\boldsymbol{m}_i+\mu_i\boldsymbol{m}_{i+1}=3\boldsymbol{E}_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\qquad(7.10)$$

式中记

$$\lambda_i=\frac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}},\ \mu_i=\frac{l_i}{l_i+l_{i+1}},\ \rho_i=2+\frac{1}{2}\lambda_i\eta_i,\ \boldsymbol{E}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i+\mu_i\boldsymbol{e}_{i+1}.$$

我们规定取 $\eta_i\geqslant0$，称 $\rho_i(\geqslant2)$ 为张力参数．当取定所有的 $\eta_i=0$ 时，$\rho_i=2$，(7.10) 就是累加弦长三次参数样条曲线的连续性方程．从这里看到，我们所以取自由参数 $\xi_i=\dfrac{l_i}{l_{i+1}}$，是为了把累加弦长三次参数样条曲线作为特例包括在内．

我们把连续性方程(7.10)的几种非周期边界条件统一写成

$$\begin{cases}\rho_0\boldsymbol{m}_0+\mu_0\boldsymbol{m}_1=3\boldsymbol{E}_0,\\ \lambda_n\boldsymbol{m}_{n-1}+\rho_n\boldsymbol{m}_n=3\boldsymbol{E}_n,\end{cases}\qquad(7.10)'$$

式中张力参数 $\rho_0,\ \rho_n\geqslant2$，并且有 $0<\lambda_n,\ \mu_0<1$；$0<|\boldsymbol{E}_0|,\ |\boldsymbol{E}_n|<1$．(7.10) 和 (7.10)$'$ 组成完整的连续性方程，它的系数矩阵是三对角形式，而且对角严格占优，这就说明了，解一定存在而且是唯一的．我们把向量方程写成两个分量式，就可以用普通的追赶法求解．这时，插值公式是 (7.6)，其中 $\boldsymbol{P}_i'(0)=l_i\boldsymbol{m}_{i-1}$，$\boldsymbol{P}_i'(1)=l_i\boldsymbol{m}_i$．这样得到的样条曲线自然是 C^2 连续．

2° 保凸性条件

如果把完整连续性方程 (7.10) 和 (7.10)$'$ 的系数矩阵的逆阵元素记为 $a_{ij}(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，它的解写成

$$\boldsymbol{m}_i=3\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_j\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

利用 Kershaw (1970) 关于三对角矩阵的逆阵的一个估计式

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho_i}<a_{ii}<\dfrac{1}{\rho_i}A_i, \\
0<(-1)^{i-j}a_{ij}<\left(\prod\limits_{r=r_1}^{r_2}\rho_r\right)^{-1}A_j \qquad (i\neq j), \\
\qquad (i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n),
\end{cases}
$$

式中已置 $A_i=\dfrac{\omega_i}{\omega_i-1}$，$\omega_i=\min(\rho_{i-1}\rho_i,\ \rho_i\rho_{i+1})$，$r_1=\min(i,\ j)$，$r_2=\max(i,\ j)$，我们能够证明下述引理，但是这里略去引理的证明过程.

引理 当取 $\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}\geqslant 5$ 时，

$$
\begin{cases}
\sin\alpha_i<\dfrac{3.3}{\rho_i}, \\
|\boldsymbol{m}_i|<\dfrac{4.4}{\rho_i}
\end{cases}
\quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n), \tag{7.11}
$$

式中 α_i 表示 $\boldsymbol{m}_i$ 与 $\boldsymbol{E}_i$ 的夹角，并且 $\rho_{-1}=\rho_{n+1}=0$.

这说明，当所取的 $\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}$ 变得充分大时，$|\boldsymbol{m}_i|\to 0$，$\boldsymbol{m}_i$ 的方向趋于 $\boldsymbol{E}_i$ 的方向. 于是，当所取的 $\rho_{i-2}=\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}$ 充分大时，$|\boldsymbol{m}_{i-1}|$，$|\boldsymbol{m}_i|\to 0$；$\boldsymbol{m}_{i-1}$ 与 $\boldsymbol{m}_i$ 的方向分别趋于 $\boldsymbol{E}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{E}_i$ 的方向. 而 $\boldsymbol{E}_j$ 是 $\boldsymbol{e}_j$ 与 $\boldsymbol{e}_{j+1}$ 的加权平均($j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$). 这样，只要给定的型值点为凸(即所有的 φ_j 同号)，第 i 段曲线的两条端点切向量的相对长度一定都为正并且趋近于零，这就保证了第 i 段曲线上无奇点和拐点(图 24).

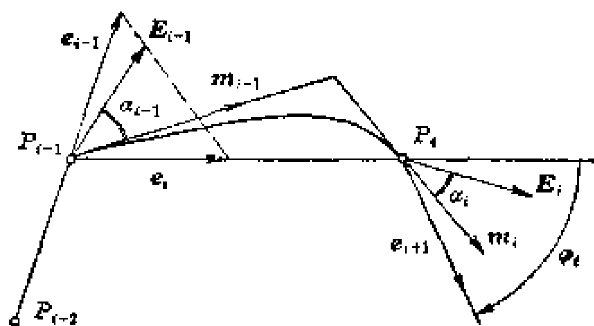


图 24

所谓张力参数取得充分大，意思是只要取定量的估计式

$$\rho_{i-2}=\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}$$
$$\geqslant\max\left(\frac{6.2}{\lambda_{i-1}|\sin\varphi_{i-1}|},\ \frac{3.3}{\mu_{i-1}|\sin\varphi_{i-1}|},\right.$$
$$\left.\frac{3.3}{\lambda_i|\sin\varphi_i|},\ \frac{6.2}{\mu_i|\sin\varphi_i|}\right),\tag{7.12}$$

第 i 段曲线上，也就没有奇点，没有拐点．证明的细节这里从略（刘鼎元 [2]，1979）．

诚然，(7.12) 式是一个相当保守的估计．它的意义在于说明用三次参数曲线段构造大挠度的保凸张力样条曲线的可能性．实用上，为了保凸，可以仿照上一章的张力样条函数，设计一种选择每个 ρ_i 的迭代程序，对此我们就不仔细介绍了．

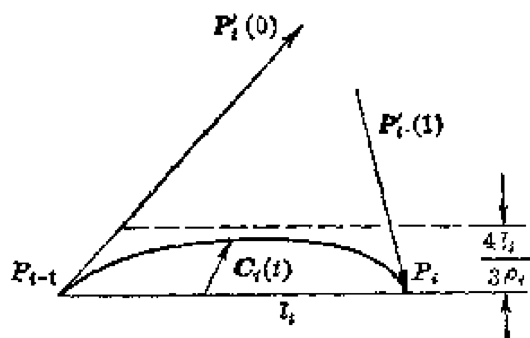


图 25

3° 有大张力参数的样条曲线的特性

用(7.6)式中的向量作出新向量

$$\begin{aligned}C_i&\equiv P_i(t)-P_{i-1}-t^2(3-2t)L_i\\&=t(t-1)^2P_i'(0)+t^2(t-1)P_i'(1)\\&=t(t-1)^2l_im_{i-1}+t^2(t-1)l_im_i,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\end{aligned}$$

只要注意到当 $t\in[0,\ 1]$ 时，

$$\max|t(t-1)^2|=\max|t^2(t-1)|=\frac{4}{27},$$

以及 $(7.11)_2$，我们便有

$$|C_i(t)|\leqslant\frac{4}{27}l_i(|m_{i-1}|+|m_i|)<\frac{4}{3}\frac{l_i}{\rho_i}.$$

它的几何意义是这样：当取定 $\rho_{i-2}=\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}(\geqslant 5)$ 时，第 i 曲线段落在平行于弦 $P_{i-1}P_i$ 的一个狭带内，带的宽度为 $\frac{4}{3}\frac{l_i}{\rho_i}$（如图 25）．这表明，当 $\rho_{i-2}=\rho_{i-1}=\rho_i=\rho_{i+1}\to\infty$ 时，第 i 曲线段 $P_i(t)\to$ 弦 $P_{i-1}P_i$，并且从 $(7.11)_1$ 知道，此时两个端点切方向分

别趋近 $\boldsymbol{E}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{E}_i$.

样条曲线在 P_{i-1} 处的曲率

$$k_{i-1}=\frac{[\boldsymbol{P}_i'(0)\times\boldsymbol{P}_i''(0)]}{|\boldsymbol{P}_i'(0)|^3}$$

$$=\frac{6[\boldsymbol{P}_i'(0)\times\boldsymbol{L}_i]-2[\boldsymbol{P}_i'(0)\times\boldsymbol{P}_i'(1)]}{|\boldsymbol{P}_i'(0)|^3}$$

$$=\frac{6[\boldsymbol{m}_{i-1}\times\boldsymbol{e}_i]-2[\boldsymbol{m}_{i-1}\times\boldsymbol{m}_i]}{l_i|\boldsymbol{m}_{i-1}|^3}.$$

因此，当 $\rho_{i-2}=\rho_{i-1}=\rho_i\to\infty$ 时，$k_{i-1}\to\infty$.

综合起来，我们得到结论如下：

当 $\rho_i\to\infty$ 时 $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

(1) 整个样条曲线→弦线多边形，

(2) 样条曲线在型值点 P_i 处的切向 $\boldsymbol{m}_i\to\boldsymbol{E}_i(i=0,\ 1,\cdots,\ n)$，

(3) 样条曲线在型值点 P_i 处的曲率 $k_i\to\infty(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

此时，整个样条大体上接近于弦线多边形．仅仅在每个型值点 P_i 处有一个光滑的急转弯，使得样条保持 C^2 连续．这就是有大张力参数的样条曲线的几何图象.

7.4 Manning 的归范样条曲线

1974 年，英国的 Manning 利用三次参数曲线段构造了一种 C^2 连续的插值样条曲线，他称之为归范样条曲线．在国外使用三次参数曲线段来构造 C^2 连续的插值样条的工作中，除了在 § 6 介绍过的累加弦长三次参数式外，这是另一种值得注意的样条曲线.

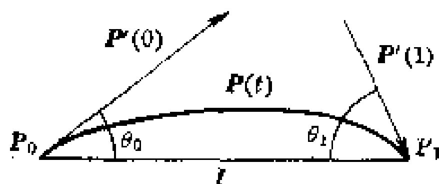


图 26

本节中，我们先简要介绍这种归范样条是如何构造的，然后阐明一个事实：当给定的型值点满足局部小挠度条件时，归范样条曲线和累加弦长三次参数样条曲线在忽略高阶项的情况下是一致的，因此它们有着同样的逼近阶.

取一段分别以 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 为两端点，以 $\boldsymbol{P}'(0)$ 和 $\boldsymbol{P}'(1)$ 为两端点切向量的三次参数曲线段 $\boldsymbol{P}(t)$，$t\in[0,1]$．设端点切线角为 θ_0 和 θ_1，弦长 $l=\overline{P_0P_1}$（图 26）．按照 Manning 的规定，曲线段在两端点的切向量长度是

$$\begin{cases} |\boldsymbol{P}'(0)|=\dfrac{2l}{1+\sigma\cos\theta_1+(1-\sigma)\cos\theta_0}, \\ |\boldsymbol{P}'(1)|=\dfrac{2l}{1+\sigma\cos\theta_0+(1-\sigma)\cos\theta_1}. \end{cases} \tag{7.13}$$

这里 σ 是在 0 和 1 之间适当选择的一个常数．Manning 在 1972 年曾取定 $\sigma=1$，在 1974 年发表的文章里他建议取 $\sigma=\frac{2}{3}$，因为他认为这是在作了一系列图形试验后得到的最满意的经验数据．他称满足(7.13)式的三次参数曲线段为**归范曲线段**．用归范曲线段构造的 C^2 连续的插值样条就称为**归范样条曲线**．

设平面上已经给定 $n+1$ 个型值点 $P_i(i=0,1,\cdots,n)$．前面已经证明，(7.7) 式的成立是为了第 i 段和第 $i+1$ 段曲线在相连接的型值点 P_i 处要达到 C^2 连续的充要条件．它们的连接方式如图 27 所示．

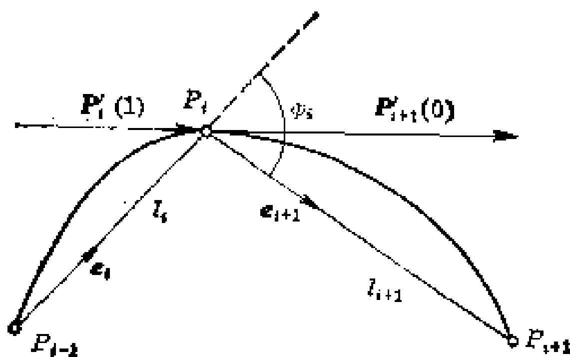


图 27

记 $s_i=|\boldsymbol{P}_i'(1)|$，$r_i=|\boldsymbol{P}_{i+1}'(0)|$；$P_i$ 处切线方向上的单位向量为 $\boldsymbol{T}_i$；弦 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ 上的单位向量为 $\boldsymbol{e}_i$，则从(7.13)式，在取 $\sigma=\frac{2}{3}$ 时，$(7.7)_1$ 可以写成

$$\boldsymbol{P}_i'(1)=s_i\boldsymbol{T}_i,\ \boldsymbol{P}_{i+1}'(0)=r_i\boldsymbol{T}_i, \tag{7.14}$$

式中

$$\begin{cases} r_i=\dfrac{2l_{i+1}}{1+\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{T}_{i+1}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{T}_i\right)\cdot\boldsymbol{e}_{i+1}}, \\ s_i=\dfrac{2l_i}{1+\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{T}_{i-1}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{T}_i\right)\cdot\boldsymbol{e}_i}. \end{cases} \tag{7.15}$$

因为每一段都是三次参数曲线段，关系式(7.8)一定成立．为了要达到 C^2 连续，(7.9)也必须满足，其中的 $\xi_i=\dfrac{s_i}{r_i}$．按照(7.14)改写(7.9)：

$$\varkappa_i\boldsymbol{T}_i=3(r_i^2\boldsymbol{L}_i+s_i^2\boldsymbol{L}_{i+1})-r_{i-1}r_i^2\boldsymbol{T}_{i-1}-s_i^2s_{i+1}\boldsymbol{T}_{i+1}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{7.16}$$

其中 $\varkappa_i=r_is_i\left[2(r_i+s_i)+\dfrac{1}{2}r_i\eta_i\right]$．

这就是归范样条曲线的连续性方程．类似地，添上两个适当的边界条件，它们全体便构成了完整的连续性方程组．形式上和上一节的参数张力样条有些相仿．显然，(7.16)中的第 i 个方程包含 $\boldsymbol{T}_{i-1}$，$\boldsymbol{T}_i$，$\boldsymbol{T}_{i+1}$ 这三个未知方向的单位向量．然而它却是非线性方程组，因而给我们带来了求解的困难．为此，Manning 设计出一种迭代技巧来求解(每一步都取 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$)：

(1) 选择单位向量 $\boldsymbol{T}_i$ 合理的初值，例如 $\boldsymbol{T}_i /\!/ \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}}$；

(2) 从(7.15)计算型值点 P_i 左右两边的切向量长度 r_i 和 s_i；

(3) 把 r_i，s_i 和 $\boldsymbol{T}_i$ 的初值放到(7.16)的右端，由此计算得到新的单位向量 $\boldsymbol{T}_i^*$；

(4) 用 $\boldsymbol{T}_i^*$ 代替 $\boldsymbol{T}_i$；

(5) 重复(2)，(3)，(4)，直到过程收敛．

据 Manning 本人的认为，还有一些存在的问题：

(1) 可能出现迭代过程不收敛的情况，虽然他还没有遇到过；

(2) 解不是唯一的. 例如，由于 $\boldsymbol{T}_i$ 是单位向量，我们对于 (7.16) 左端系数 $\varkappa_i$ 的绝对值没有兴趣. 然而关于 $\varkappa_i$ 的符号仍然存在一个任意性. 在局部小挠度情况下取定 $\varkappa_i>0$，那是没有问题的. 当局部大挠度出现时，可以取定 $\varkappa_i>0$，也可以取定 $\boldsymbol{T}_i\cdot\boldsymbol{T}_i^*\geqslant 0$，以保证每迭代一次 $\boldsymbol{T}_i$ 的方向变化不超过 90°. 一般讲，这两种取法将导致同一结果. 但是也存在一些具有不同结果的例子(如图 28).

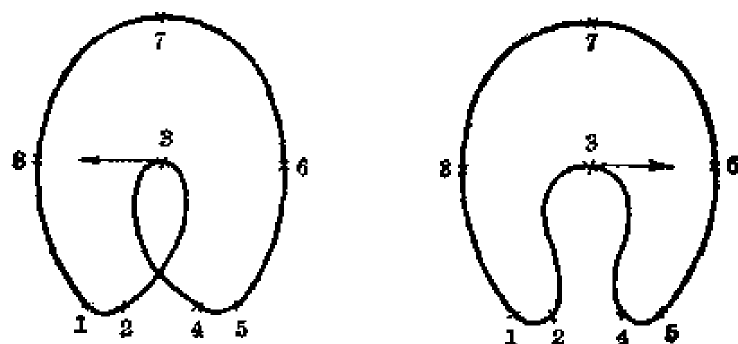


图 28

解的不唯一性是数据不完全的缘故. 决定这样一条曲线，仅仅给出 8 个型值点是过于稀疏了. 这或许不能被认为是他的方法的缺点.

用我们的话来讲，这种问题的出现应当归因于局部大挠度. 从图上看出，$\boldsymbol{L}_2$ 和 $\boldsymbol{L}_3$ 所夹的角近于 150°，工程上称型值点 P_2, P_3, P_4 之间是一个“软档”，就是说信息不够. 对于这种情况，本来就需要人为地附加一些规定性，以便于完全决定这条曲线.

在局部小挠度情况下，我们可以将(7.15)和(7.16)线性化，由此得到

$$\begin{cases} r_i=l_{i+1}[1+0(\varphi^2)], \\ s_i=l_i[1+0(\varphi^2)] \end{cases} \tag{7.17}$$

以及

$$\lambda_i\boldsymbol{T}_{i-1}+\rho_i\boldsymbol{T}_i+\mu_i\boldsymbol{T}_{i+1}=3\boldsymbol{E}_i+\varepsilon_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{7.18}$$

式中已置 $\lambda_i=\dfrac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{l_i}{l_i+l_{i+1}}$, $\rho_i=2+\dfrac{1}{2}\lambda_i\eta_i$, $|\varepsilon_i|=0(\varphi^3)$, $\boldsymbol{E}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i+\mu_i\boldsymbol{e}_{i+1}$.

如同§6中对累加弦长三次参数样条曲线讨论用的方法一样，将连续性方程(7.18)投影在 $\boldsymbol{e}_{i+1}$ 上，我们得到

$$\lambda_i\cos(\theta_{i-1}-\varphi_i)+\rho_i\cos\theta_i+\mu_i\cos(\theta_{i+1}+\varphi_{i+1})$$
$$=3(\lambda_i\cos\varphi_i+\mu_i)+0(\varphi^3)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

将上列方程组再线性化，我们有

$$\lambda_i+\rho_i+\mu_i=3+0(\varphi^2)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

从此得到

$$\rho_i=2+0(\varphi^2)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\tag{7.19}$$

其中 $\varphi=\max\limits_i|\varphi_i|$.

我们将(7.19)代入归范样条的切向量连续性方程(7.18)中，再同累加弦长三次参数样条的切向量连续性方程(6.4)相比较，容易看出，它们的系数矩阵相同，只是右端各项相差一个长度为 $0(\varphi^2)$ 的向量 ε_i^*.

我们进而来讨论这两种样条的曲率连续性方程之间的差别. 为此，用向量 $\boldsymbol{P}_i'(1)$ 和 $\boldsymbol{P}_{i+1}'(0)$ 依次边边叉乘(7.8)的两式，利用(7.14)和(7.17)，并沿用§6的图13，不过要把图中的 $\boldsymbol{m}_{i-1}$, $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{m}_{i+1}$ 依次改成 $\boldsymbol{T}_{i-1}$, $\boldsymbol{T}_i$, $\boldsymbol{T}_{i+1}$. 如果注意图中有向角 θ_i 和 φ_i 的指向，我们便可推得

$$\begin{cases}l_ik_i=2(2\varphi_i+\theta_{i-1}+2\theta_i)+0(\varphi^3),\\ l_{i+1}k_i=-2(\varphi_{i+1}+2\theta_i+\theta_{i+1})+0(\varphi^3)\end{cases}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

式中 k_i 代表归范样条在型值点 P_i 处的曲率. 从中解出

$$\begin{cases}\theta_{i-1}=-\dfrac{l_i}{6}(2k_{i-1}+k_i)+0(\varphi^3),\\[2ex] \theta_i=\dfrac{l_i}{6}(k_{i-1}+2k_i)-\varphi_i+0(\varphi^3).\end{cases}$$

于是得到归范样条的曲率连续性方程

$$\mu_i k_{i-1}+2k_i+\lambda_i k_{i+1}=3K_i+0(\varphi^2)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

这组方程与累加弦长三次参数样条的曲率连续性方程(6.12)的主部是相同的，两者的差别仅在高阶项 $0(\varphi^2)$ 中.

我们结合到§6中第二个问题的讨论，就得到结论：对于同一组局部小挠度型值点，上述两种样条在型值点处曲率的逼近程度为 $0(\varphi^2)$，从而曲线的逼近程度为 $0(\varphi^4)$．这就说明了，当把归范样条曲线实际应用于局部小挠度型值点时，在一般工程需要的精度内，无论(7.13)中的 σ 在 $[0,\ 1]$ 中取什么数，人们也不会觉察出什么差别来(刘鼎元 [1]，1978).

第四章　Bézier 曲线和 B 样条曲线

§1　背　景

到目前为止，我们已经介绍了样条函数和三次参数样条曲线，而主要应用它们到插值的场合. 这些插值曲线适用于船舶、飞机和汽车外形的数学放样工作. 在数学放样程序中，有的是先光顺型值点，然后插值连成线，有的是先插值，后光顺，而再插值.

这一套办法，当然可以移用到船舶、飞机和汽车的外形设计工作中去. 在外国这些部门的一些著名的大公司里，已经形成了从设计到制造的整个系统，运行多年，而且成为专利.

然而，就外形设计来讲，初始给出的型值点往往并不精确. 除了少数几个必须满足的性能指标以外，美观性的考虑占了不少份量，自由度是相当大的. 因此，用样条曲线精密地插值这些本来就是粗糙不堪的原始型值点，实在是一种浪费.

大家都知道，为了画一辆汽车外形，即使再蹩脚的画家，也不会先在图纸上标一些"型值点"，然后连起一条"插值"曲线来的. 他是用折线段勾出一个轮廓，再用一些光滑曲线段"逼近"这些折线.

本章将要介绍 Bézier 曲线，以及它的拓广，即 B 样条曲线，这一类曲线就是用光滑的参数曲线段逼近折线多边形的一种数学表示式来决定的. 原始的想法很可能受到打轮廓、画汽车的启发.

从 1962 年起，法国雷诺汽车公司的工程师 Bézier[1,2,3] 开始构造他的以“逼近”为基础的参数曲线表示法. 以这种方法为基础，完成了一种自由型曲线和曲面的设计系统 UNISURF，1972 年在雷诺汽车公司正式使用. 这就叫 **Bézier 曲线**.

设计的过程大致是这样：从一块小粘土模型或一根手绘的曲线上取来一些数据，以原尺寸把它们打在图板上. 外形设计师用普通的制图工具手工地描出这根曲线. 然后从这张草图上估计出 Bézier 多边形的各个顶点坐标，输入计算机，由数控绘图机画出相应的曲线. 对于空间曲线，则在两个平面投影中，即在两视图上分别加以逼近. 一般说来，只要稍为调整 Bézier 多边形的顶点，经过几次迭代便可得到满意的结果.

使用者对于这一套方法的数学原理可不必详细了解. Bézier 方法已经将函数逼近理论同几何表示结合到这样一种简单而且直观的地步，使得设计师在计算机上实现起来，就象他使用常规设计和作图工具一样得心应手.

在 1972～1974 年期间，Gordon、Riesenfeld 和 Forrest 等受到 Bézier 这样用多边形控制曲线形状的启发，把 B 样条函数扩张成参数形式的 B 样条曲线，也使用了 B 特征多边形来控制 B 样条曲线. 特别有用的是三次式和二次式. 同 Bézier 曲线相比较，除了共有的直观和保凸这些优点外，还具有下列优越之处：(1)局部修改只影响邻近几段，不会牵一而动百；(2)对特征多边形逼得更近，便于控制；(3)多项式的次数低，计算简单. 由于这些优点，B 样条曲线在外形设计中可能算是很有前途的东西.

§2 Bézier 曲线

2.1 定义和性质

给定 $n+1$ 个空间向量 $\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$，称 n 次参数曲线段

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{b}_i B_{i,n}(t) \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{2.1}$$

为 **Bézier 曲线**，式中已置二项分布密度为

$$\begin{cases} B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}, \\ C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!} \quad (i=0, 1, \cdots, n). \end{cases} \tag{2.2}$$

在取定原点 0 以后，依次用线段连接 $\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 中相邻两个向量的终点，这样组成的 n 边折线多边形称为 **Bézier 多边形，或特征多边形.**

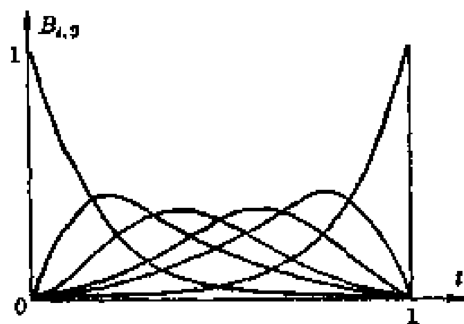


图 1

我们知道，在区间 [0, 1] 上单参数的 n 次代数多项式全体组成 $n+1$ 维线性空间 $\mathscr{P}_n$. 因为 (2.2) 中的 $n+1$ 个函数 $B_{i,n}(t)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 是线性无关的，所以它们恰好构成空间 $\mathscr{P}_n$ 的一组基底，每个函数 $B_{i,n}(t)$ 叫做 **Bernstein 基函数**. 图 1 示意了 $n=5$ 时的六个 Bernstein 基函数的图形.

容易证明，Bernstein 基函数具有下列性质:

(1) 正性.

$$B_{i,n}(t)\begin{cases} =0, \text{ 当 } t=0, 1, \\ >0, \text{ 当 } t\in(0, 1) \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots, n-1);$$

$$\begin{cases} B_{0,n}(0)=B_{n,n}(1)=1, \\ B_{0,n}(1)=B_{n,n}(0)=0, \\ 0<B_{0,n}(t), B_{n,n}(t)<1, \quad \text{当 } t\in(0, 1). \end{cases}$$

(2) 权性.

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \equiv 1, \quad t \in [0, 1].$$

(3) 对称性.

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t) \quad (i=0, 1, \cdots, n).$$

(4) 导函数.

$$B'_{i,n}(t) = n\{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\} \quad (i=0, 1, \cdots, n). \tag{2.3}$$

(5) 最大值.

$$B_{i,n}(t) \text{ 在 } t = \frac{i}{n} \text{ 处达到最大值.}$$

(6) 递推性.

$$B_{i,n}(t) = (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t) \quad (i=0, 1, \cdots, n).$$

注意：为了书写的简洁，这里和以后，我们统一规定：凡当指标超出范围以致记号不具意义时，例如 $B_{-1,n}(t)$ 和 $B_{n,n-1}(t)$ 等，都要把它们理解为零.

从上述 Bernstein 基函数的函数性质，可以导出 Bézier 曲线 (2.1) 具有下列几何性质：

(1) 端点性质.

从性质(1)得到 $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{b}_n$. 这表明了 Bézier 曲线是以 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_n$ 为其起端和终端的.

从(2.1)和性质(4)有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}'(t) &= n \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\} \\ &= n \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i B_{i-1,n-1}(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

式中记 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 代表 Bézier 多边形的边向量.

从(2.4)得到 $\boldsymbol{P}'(0)=n\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{P}'(1)=n\boldsymbol{a}_n$. 说明 Bézier 曲线是分别以 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 为其起端和终端的切方向.

类似地有 $\boldsymbol{P}''(0)=n(n-1)(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1)$, $\boldsymbol{P}''(1)=n(n-1)(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_{n-1})$. 因此曲线在两端的副法线向量分别是

$$\boldsymbol{\gamma}(0)\equiv\boldsymbol{P}'(0)\times\boldsymbol{P}''(0)=n^2(n-1)\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2,$$
$$\boldsymbol{\gamma}(1)\equiv\boldsymbol{P}'(1)\times\boldsymbol{P}''(1)=n^2(n-1)\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n.$$

一般地，起点的 r 阶导向量 $\boldsymbol{P}^{(r)}(0)$ 仅同相邻的 r 条边向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1, 2, \cdots, r)$ 有关，与更远的各条边无关. 终点情况是与此相对称的.

(2) 对称性.

现在，我们保持 Bézier 曲线(2.1)的诸顶点 $\boldsymbol{b}_i$ 的位置不变，只把次序完全颠倒过来. 倒转得来的新多边形顶点记为 $\boldsymbol{b}_i^*=\boldsymbol{b}_{n-i}(i=0, 1, \cdots, n)$. 这样得到的一条 Bézier 曲线是符合原来曲线的，只不过有相反的定向而已(图 2). 这是因为，记新的 Bézier 曲线为 $\boldsymbol{P}^*(t)$ 时，

$$\boldsymbol{P}^*(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{b}_i^*B_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{b}_{n-i}B_{i,n}(t)=\sum_{i=n}^{0}\boldsymbol{b}_iB_{n-i,n}(t)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{b}_iB_{i,n}(1-t)=\boldsymbol{P}(1-t).$$

这个性质告诉我们，Bézier 曲线及其多边形的两个端点的地位是对称的(并不是形状对称)：一条 Bézier 曲线在起点有某种几何性质的话，它在终点也有相同的性质.

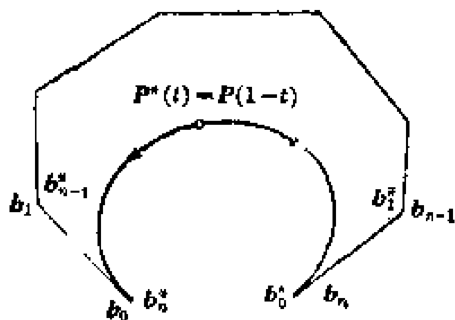


图 2

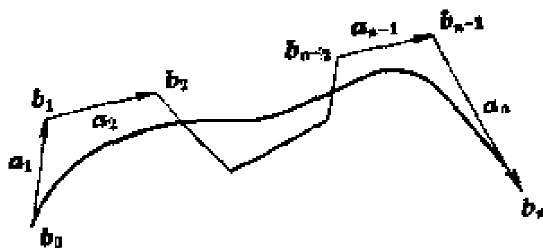


图 3

(3) 凸包性质.

从 Bernstein 基函数的性质(1)和(2)得知，$B_{i,n}(t)$ $(i=0, 1,$

$\cdots$, n)构成权函数. 对于固定的 t, $\boldsymbol{P}(t)$ 是多边形各顶点 $\boldsymbol{b}_i$($i=0, 1, \cdots, n$)的加权平均, 权因子依次是 $B_{i,n}(t)$ ($i=0, 1, \cdots, n$). 这个事实反映到几何图形上来, 就意味着 Bézier 曲线落在其特征多边形的凸包之中(图 3).

(4) 几何不变性.

Bézier 曲线(2.1)是向量表示式,曲线的形状仅仅与特征多边形的各顶点 $\boldsymbol{b}_i$($i=0, 1, \cdots, n$)有关, 因此, 它不依赖于坐标系的选择.

现在来看几个低次 Bézier 曲线的例子:

当 $n=1$ 时, (2.1)式为

$$\boldsymbol{P}(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_0+t\boldsymbol{b}_1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

所以一次 Bézier 曲线是以 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_1$ 为首末两端点的连接线段.

当 $n=2$ 时, (2.1) 式是关于 t 的二次参数曲线. 因此二次 Bézier 曲线是一段抛物线. 它的矩阵形式方程如下:

$$\boldsymbol{P}(t)=[t^2\quad t\quad 1]\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_0\\ \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix},\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

从 Bézier 曲线的端点性质知道,这段抛物线以 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_1$ 为两端点, 以 $2\boldsymbol{a}_1$ 和 $2\boldsymbol{a}_2$ 为两端点的切向量,而且有 $\boldsymbol{P}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{b}_1)$, 式中 $\boldsymbol{b}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_2)$. 因此 $\boldsymbol{P}\left(\frac{1}{2}\right)$就是 $\Delta b_0b_1b_2$ 的中线 b_1b^* 上的中点(图 4).

当 $n=3$ 时,三次 Bézier 曲线(2.1) 是三次参数曲线段的一种特殊表示式. 它的矩阵形式方程如下:

$$\boldsymbol{P}(t)=[t^3\ t^2\ t\ 1]\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_0\\ \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{b}_3\end{bmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

图 4

图 5

我们利用上一章的结果，可以弄清楚平面三次 Bézier 曲线的形状与它的特征多边形之间的关系．这些将在 2.4 节叙述．

高于三次的情况比较复杂，许多问题都有待于理论上的解决．比方，在平面上随手画一个特征多边形(图 5)，请问：它所对应的 Bézier 曲线上有几个拐点，有几个奇点？

目前所能做的，仅仅是从逼近的角度看看 Bézier 曲线同它的特征多边形之间有什么关系．为此，先回顾一下函数逼近论中 Bernstein 多项式的一些逼近性质．

设 $f(t)$ 是区间 $[0,\ 1]$ 上的连续函数，则

$$\mathbb{B}_n(f,\ t)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)B_{i,n}(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

称为函数 $f(t)$ 的 n 次 **Bernstein 多项式**．当 $n\to\infty$ 时，Bernstein 多项式序列 $\mathbb{B}_n(f,\ t)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上一致收敛于 $f(t)$．更进一步说，若 $f(t)\in C^r[0,\ 1]$，则当 $n\to\infty$ 时，$\mathbb{B}_n^{(r)}(f,\ t)$ 在 $[0,\ 1]$ 上也一致收敛于 $f^{(r)}(t)$．

遗憾的是这种收敛速度非常缓慢，致使 Bernstein 多项式在一个相当长的时期内没有找到实际应用．

然而，如同 B 样条函数一样，Bernstein 多项式也具有 VD 性质．事实上，已经证明，Bernstein 基函数是重节点 B 样条函数的一个特例．因此，Bernstein 多项式逼近必定具有良好的光顺性：它的拐点个数不会超过被逼函数 $f(t)$ 的拐点个数．如果 $f(t)$ 是凸函数，那末每一个 $\mathbb{B}_n(f,\ t)$ 也是凸函数．Bernstein 多项式在

很大程度上继承了被逼函数的几何特性．这样一个优美的逼近性质，使得 Bernstein 多项式特别适用于外形设计，这是因为在这个领域里，逼近式的大范围几何性质比逼近的接近性更为重要的缘故．

Bézier 曲线(2.1)的每一个分量都是 Bernstein 多项式．(2.1)不过是 Bernstein 多项式的向量值形式．可以期望，Bézier 曲线在逼近特征多边形的过程中，将会继承 Bernstein 多项式良好的几何逼近性质．这样，我们就有可能用调整特征多边形的顶点来控制 Bézier 曲线的形状．实践证明，这种设想是可行的，有效的．然而，要是因此就认为平面 Bézier 曲线自然而然地具有 VD 性质，那是一种误解．因为一到参数曲线的场合，问题要复杂得多．比如，n 次多项式函数最多只有 $n-2$ 个拐点，而 n 次平面参数曲线至多可以有 $2n-4$ 个拐点，更不要谈还可能出现 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个奇点呢（当然包括一部分虚点）．最近，我们证明了平面 n 次 Bézier 曲线凸性定理，就是：在平面上，当 Bézier 多边形为凸时①，Bézier 曲线也是凸的，即曲线段上不存在奇点和拐点（刘鼎元，1980）．

在本节一开头给出的定义式(2.1)，称为 Bézier 曲线的 Bernstein 表示．那是在 1972 年前后由 Forrest 等人所发展的(Forrest[5]，Gordon & Riesenfeld[2])．这样，在建立了 Bézier 曲线同 Bernstein 多项式的联系之后，就可能通过 Bernstein 多项式的许多已知性质，更深刻地探讨和理解 Bézier 曲线的行为．

其实，Bézier 起初是用特征多边形的边向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1, 2, \cdots, n)$，加上首顶点向量 $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{b}_0$ 来定义 Bézier 曲线的：

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{a}_i f_{i,n}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{2.5}$$

① 凸的意义是指连接 Bézier 多边形两端点后得到的闭多边形是凸多边形。

式中

$$\begin{cases} f_{0,n}(t) = 1, \\ f_{i,n}(t) = \dfrac{(-t)^i}{(i-1)!} \dfrac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \dfrac{(1-t)^n - 1}{t} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \end{cases}$$

经过直接计算，我们可证函数族 $f_{i,n}(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 与 Bernstein 基函数族 $B_{i,n}(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 之间存在下列关系：

$$(1)\ f_{i,n}(t) = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} B_{j,n}(t) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{2.6}$$

$$(2)\ f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t) = B_{i,n}(t) \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n), \tag{2.7}$$

$$(3)\ f'_{i,n}(t) = nB_{i-1,n-1}(t) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{2.8}$$

这些关系式依次说明了下列三个事实：

(1) $f_{i,n}(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是 t 的 n 次多项式，且 $f_{i,n}(0)=0$，$f_{i,n}(1)=1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

(2) 对于固定的 $t\in(0,\ 1)$，$f_{i,n}(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 关于 i 是严格递减的.

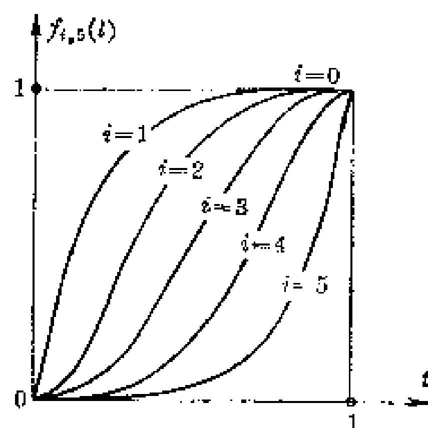


图 6

(3) 当 i 固定时 $(i\neq 0)$，$f_{i,n}(t)$ 关于 $t\in[0,\ 1]$ 是严格递增函数.

综上所述，可以看出函数族 $f_{i,n}(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的图形大体上如图 6 所示.

利用关系式 (2.7) 和 Bézier 多边形边向量与顶点向量的关系 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_{i-1}$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，我们立即推出 Bézier 曲线的两种表示式 (2.1) 和 (2.5) 是等价的.

函数族 $\{f_{i,n}(t)\}$ 并不象 Bernstein 基函数 $\{B_{i,n}(t)\}$ 那样著名而为人们所熟悉的. 如果人们初次见到 Bézier 的定义式 (2.5) 的话，那末正如穗坂衛所讲的那样，留下的印象是"好象从天上掉下来似的。"

2.2 几何作图法

当特征多边形顶点 $\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 给定时，为了画出所对应的曲线(2.1)，Bézier 曾经给出一种有趣的几何作图法.

对于固定的 $t\in[0, 1]$，我们在特征多边形以 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_{i+1}$ 为两端点的第 i 条边上找出一点 $\boldsymbol{P}_{i,1}(t)$，把这边分成比值 $t:(1-t)$，于是得到分点

$$\boldsymbol{P}_{i,1}(t)=(1-t)\boldsymbol{b}_i+t\boldsymbol{b}_{i+1}\quad(i=0, 1, \cdots, n-1). \tag{2.9}$$

这 n 个点组成一个 $n-1$ 边形. 对这个新的多边形重复上述操作，得到一个 $n-2$ 边形的顶点 $\boldsymbol{P}_{i,2}(t)\ (i=0, 1, \cdots, n-2)$. 依次类推，连续作 n 次以后，只剩下一个单点 $\boldsymbol{P}_{0,n}(t)$. 它就是 Bézier 曲线 (2.1) 上对应于参数 t 的点 $\boldsymbol{P}(t)$. 让 t 在 $[0, 1]$ 之间变动，我们就得到 Bézier 曲线(2.1)，而且向量 $n\overrightarrow{P_{0,n-1}P_{1,n-1}}$ 是曲线在 t 点的切向量. 图 7 示意了 $n=4$, $t=\dfrac{1}{3}$ 的点的作图过程.

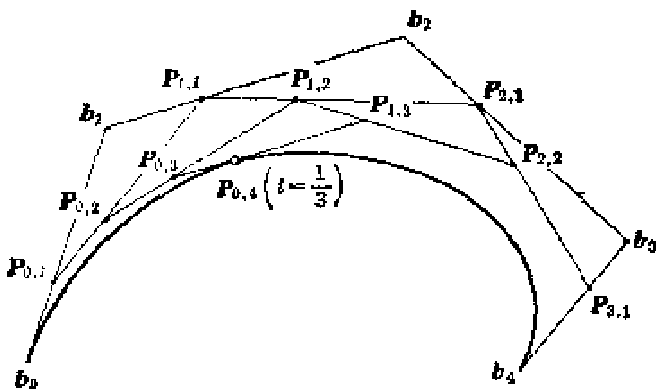


图 7

这样一个几何作图过程，在代数上对应于一个递推算式

$$\boldsymbol{P}_{i,l}(t)=(1-t)\boldsymbol{P}_{i,l-1}(t)+t\boldsymbol{P}_{i+1,l-1}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$
$$\begin{pmatrix} l=1, 2, \cdots, n \\ i=0, 1, \cdots, n-l \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

式中记 $\boldsymbol{P}_{i,0}(t)=\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$，指标 l 表示递推的步数，指标 i 表明该点是属于相应多边形的第 $i+1$ 边.

下面，我们将用数学归纳法(关于 n)证明，按照(2.10)递推 n 次的最终结果 $\boldsymbol{P}_{0,n}(t)$，就是 Bézier 曲线(2.1)上的点 $\boldsymbol{P}(t)$：

$$\boldsymbol{P}_{0,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\boldsymbol{b}_i. \tag{2.11}$$

当 $n=1$ 时，(2.11)显然成立。

我们注意到 $n-1$ 边形 $\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_{n-1}$ 按(2.10)递推 $n-1$ 次之后生成了 $\boldsymbol{P}_{0,n-1}(t)$，而另一 $n-1$ 边形 $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_n$ 生成了 $\boldsymbol{P}_{1,n-1}(t)$。假设对于任意的 $n-1$ 边形递推 $n-1$ 次后我们有了

$$\boldsymbol{P}_{0,n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{i,n-1}(t)\boldsymbol{b}_i,$$

$$\boldsymbol{P}_{1,n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}B_{i,n-1}(t)\boldsymbol{b}_{i+1}.$$

那末根据定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{0,n}(t)&=(1-t)\boldsymbol{P}_{0,n-1}(t)+t\boldsymbol{P}_{1,n-1}(t)\\&=(1-t)\sum_{i=0}^{n-1}B_{i,n-1}(t)\boldsymbol{b}_i+t\sum_{i=1}^{n}B_{i-1,n-1}(t)\boldsymbol{b}_i\\&=\sum_{i=0}^{n}\{(1-t)B_{i,n-1}(t)+tB_{i-1,n-1}(t)\}\boldsymbol{b}_i\\&=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\boldsymbol{b}_i.\end{aligned}$$

这就证明，对于任意的 n 边形 $\boldsymbol{b}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 按(2.10)递推 n 次之后所生成的点 $\boldsymbol{P}_{0,n}(t)$ 确实就是(2.1)中的 $\boldsymbol{P}(t)$。

可是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}'_{0,n}(t)&=\sum_{i=0}^{n}B'_{i,n}(t)\boldsymbol{b}_i=n\sum_{i=0}^{n}\{B_{i-1,n-1}(t)-B_{i,n-1}(t)\}\boldsymbol{b}_i\\&=n\{\boldsymbol{P}_{1,n-1}(t)-\boldsymbol{P}_{0,n-1}(t)\}=n\overrightarrow{P_{0,n-1}P_{1,n-1}},\end{aligned}$$

所以 $n\overrightarrow{P_{0,n-1}P_{1,n-1}}$ 确是曲线在 t 点的切向量。

2.3 速端曲线(Hodographs)

在给定特征多边形的起点 $\boldsymbol{a}_0$ 及 n 条边向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 后，必有一条 Bézier 曲线与之对应，即：

$$L: \qquad \boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{a}_i f_{i,n}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

把这 n 条边向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的起点都移到原点 O，依次用线段连接它们的终点，我们便获得一个新的 $n-1$ 边形，而这个多边形本身又有对应的 $n-1$ 次 Bézier 曲线 H(图 8)．H 的方程是

$$H: \qquad \boldsymbol{Q}(t)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i B_{i-1,n-1}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

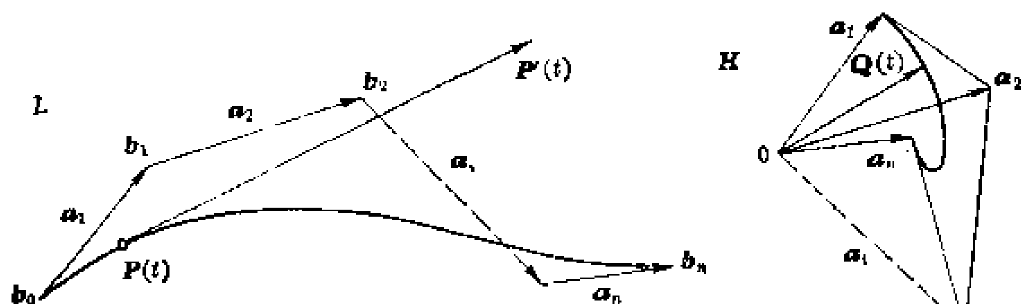


图 8

或者用(2.8)式改写为

$$\boldsymbol{Q}(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i f'_{i,n}(t)=\frac{1}{n}\boldsymbol{P}'(t). \tag{2.12}$$

这表明，除了一个常数因子 $\frac{1}{n}$ 外，H 就是 L 的切向量曲线．因此称这条 $n-1$ 次 Bézier 曲线 H 为原有的 n 次 Bézier 曲线的**速端曲线**．

当然还可以考虑 H 的速端曲线，即 L 的二阶速端曲线，而 H 是 L 的一阶速端曲线．如果 t 代表时间参数，于是 L 描述了一个质点运动的轨迹，那末一阶和二阶速端曲线分别具有速度和加速度的物理意义．

一般地，我们可以讨论 L 的 s 阶速端曲线，特别是 $n-2$、$n-1$ 和 n 阶速端曲线，它们分别是一段抛物线、一线段和异于原点 O 的一个点．更高阶的速端曲线都重合到原点 O．

速端曲线 H 比原曲线 L 降低 1 次，可能较为简单．因此，人

们希望通过 H 的特征研究来了解 L 的性质.

在实际研究空间曲线的图形和性质时，通常是把它投影到两个坐标平面上. 现在我们把曲线 L 及其速端曲线 H 投影到过原点的同一张平面上，而且用同一记号 $\boldsymbol{P}(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 表示各个的投影. 所获得的投影曲线 (l) 和 (h) 具有下列一些性质:

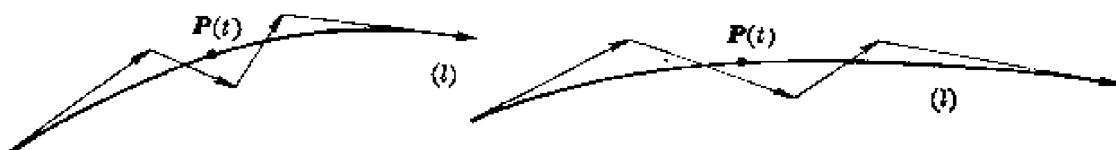
(1) 当 $\overrightarrow{OQ(t)}$ 切于 (h) 时，$\boldsymbol{P}(t)$ 是 (l) 的拐点;

(2) 当 $\overrightarrow{OQ(t)}$ 切于 (h)，而且 $\boldsymbol{Q}(t)$ 是 (h) 的拐点或尖点时，(l) 在 $\boldsymbol{P}(t)$ 将是零曲率的但非拐的点(图 9 和 10);

(3) 如果 $\boldsymbol{Q}(t)$ 重合于原点 O, 则 $\boldsymbol{P}(t)$ 是 (l) 的尖点，而且在 $\boldsymbol{P}(t)$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$ 处两曲线的切线平行(图 11).

这三项性质的证明并不复杂，留给读者自己处理.

当 $n=3$ 时，(h) 是二次 Bézier 曲线，也就是一段抛物线. 通



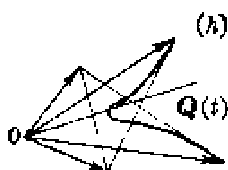


图 9

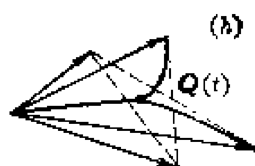
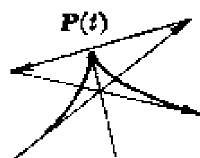


图 10



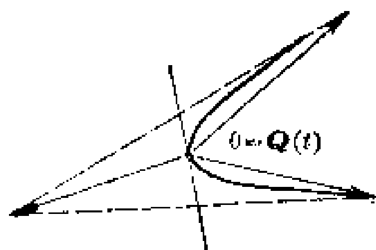


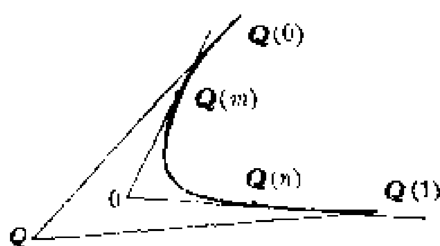
图 11

过它,我们可更具体地了解三次 Bézier 曲线(l).

(1) 如果原点 O 在抛物线的外部,并在三角形 $\boldsymbol{Q}(0)Q\boldsymbol{Q}(1)$ 的内部,那末(l)上便有两个拐点. 它们相对于 $\boldsymbol{P}(0)$ 和 $\boldsymbol{P}(1)$ 的位置,就象它们在(h) 上的对应点相对于 $\boldsymbol{Q}(0)$ 和 $\boldsymbol{Q}(1)$ 的位置一样(图 12).

(2) 如果原点 O 在抛物线的内部,则(l)上无拐点. 要是 O 还落在抛物线与弦 $\overline{\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{Q}(1)}$ 之间, 则在 (l) 上存在两对共轭点 $\boldsymbol{P}(0)$, $\boldsymbol{P}(n)$ 和 $\boldsymbol{P}(1)$, $\boldsymbol{P}(m)$. 所谓共轭的一对点,是指的切向平行且方向相反(图 13).

(3) 在无限远处,(l)的切线平行于抛物线的轴.



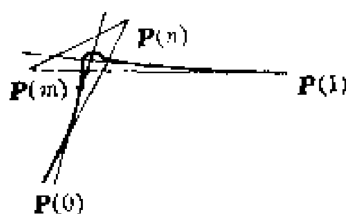
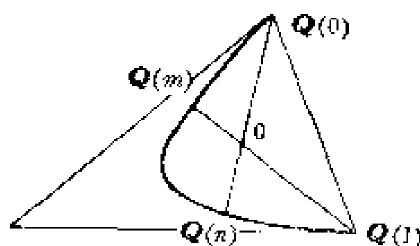


图 12



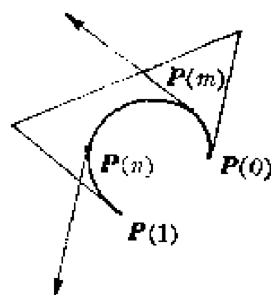


图 13

2.4 平面上三次 Bézier 曲线的形状控制

我们在上一节利用速端曲线来具体分析平面三次 Bézier 曲线的拐点和尖点,取得一些成效,但是这种方法过于间接, 而又不能包括二重点的讨论. 因此, 我们将着手解决这样一个问题: 能不能通过对特征三边形的顶点位置的调整直接控制三次 Bézier 曲线段上的拐点和奇点的个数呢(刘鼎元[4], 1980)?

在平面上给定特征三边形$\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3$后，建立图14中的仿射标架$\{O, \overrightarrow{Ob_3}, \overrightarrow{Ob_0}\}$，其中$\overrightarrow{Ob_3} /\!/ \overrightarrow{b_0b_1}$，$\overrightarrow{Ob_0} /\!/ \overrightarrow{b_3b_2}$。设$\overrightarrow{b_0b_1}=x\overrightarrow{Ob_3}$，$\overrightarrow{b_3b_2}=y\overrightarrow{Ob_0}$，则$\boldsymbol{b}_1$和$\boldsymbol{b}_2$的坐标分别是$(x, 1)$和$(1, y)$。称点$R(x, y)$为特征三边形$\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3$的特征点。

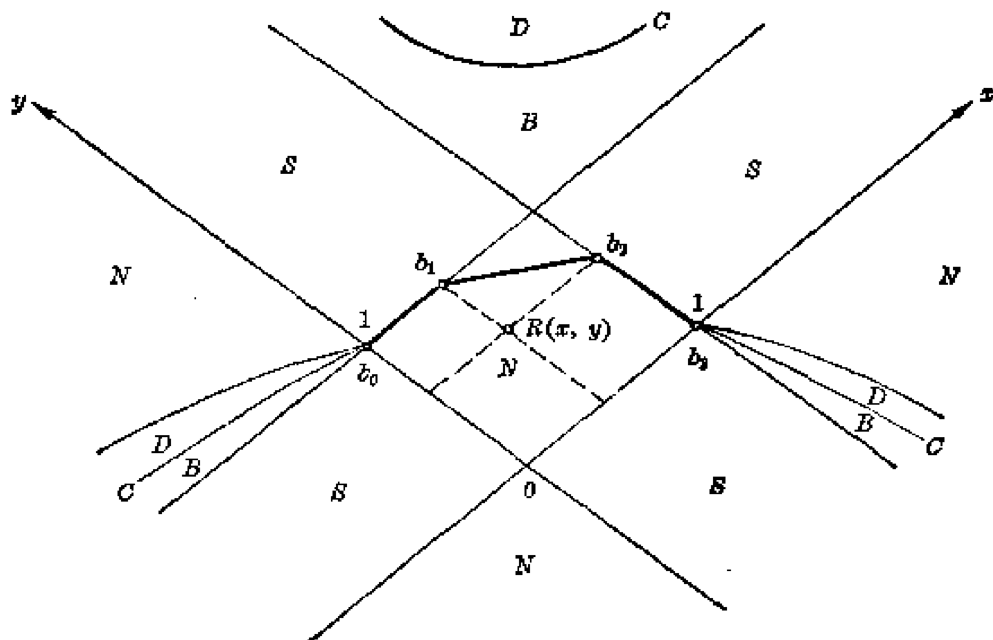


图 14

以$\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3$为特征三边形的三次 Bézier 曲线记作$L$，我们有(参阅图 14)：

定理 如果特征点

$$
R\in\begin{cases}
N, & \text{则 } L \text{ 上无拐点和奇点;}\\
S, & \text{则 } L \text{ 上有一个拐点;}\\
B, & \text{则 } L \text{ 上有两个拐点;}\\
C, & \text{则 } L \text{ 上有一个尖点;}\\
D, & \text{则 } L \text{ 上有一个二重点.}
\end{cases}
$$

式中C是双曲线$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)\left(y-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$的两支。区域$D$的一侧边界是曲线$C$，另一侧边界分别是抛物线$3y^2-3y+x=0$和$3x^2-3x+y=0$.

证明 由 Bézier 曲线的端点性质知道，L的两个端点切向量

是 $\boldsymbol{P}'(0)=3\overrightarrow{b_0b_1}$ 和 $\boldsymbol{P}'(1)=3\overrightarrow{b_2b_3}$. 因此,当把 L 看成三次参数曲线段时,它的两个端点切向量相对长度是 $\lambda=3x$ 和 $\mu=3y$. 利用上一章 § 5 的结论,注意到 $\{O; \lambda, \mu\}$ 是仿射坐标系,并且将 λ 和 μ 轴分别作压缩 $\frac{1}{3}$ 的变换,就证得定理的结论.

作为例子,图 15 示意了代表几种典型情况的三次 Bézier 曲线,它们是在沪东造船厂的数控绘图机上绘制的.

从图 15 中容易看出,当三次 Bézier 多边形为凸时,特征点 R 一定落在无拐点和奇点的区域 N 中,因此三次 Bézier 曲线是保凸的.

2.5 Bézier 样条曲线

Bézier 曲线是 n 次参数曲线的一整段,但不是样条,然而我们可以把一段段 Bézier 曲线光滑地连接起来构造样条曲线. 这样,在有些问题中(比如, Bézier 曲面片的边界曲线的合成),用起来就更加灵活,更加易于控制了.

问题是,为了在连接处达到一定的连续性,连接条件是什么?

设已经给定两条 Bézier 曲线 L(n 次)和 L^*(m 次),它们的特征多边形的边向量分别是 $\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{a}_1^*\boldsymbol{a}_2^*\cdots\boldsymbol{a}_m^*$, 并设 L 的终点同 L^* 的起点相一致. 为了在连接处达到 C^1 连续,那比较简单,充要条件就是

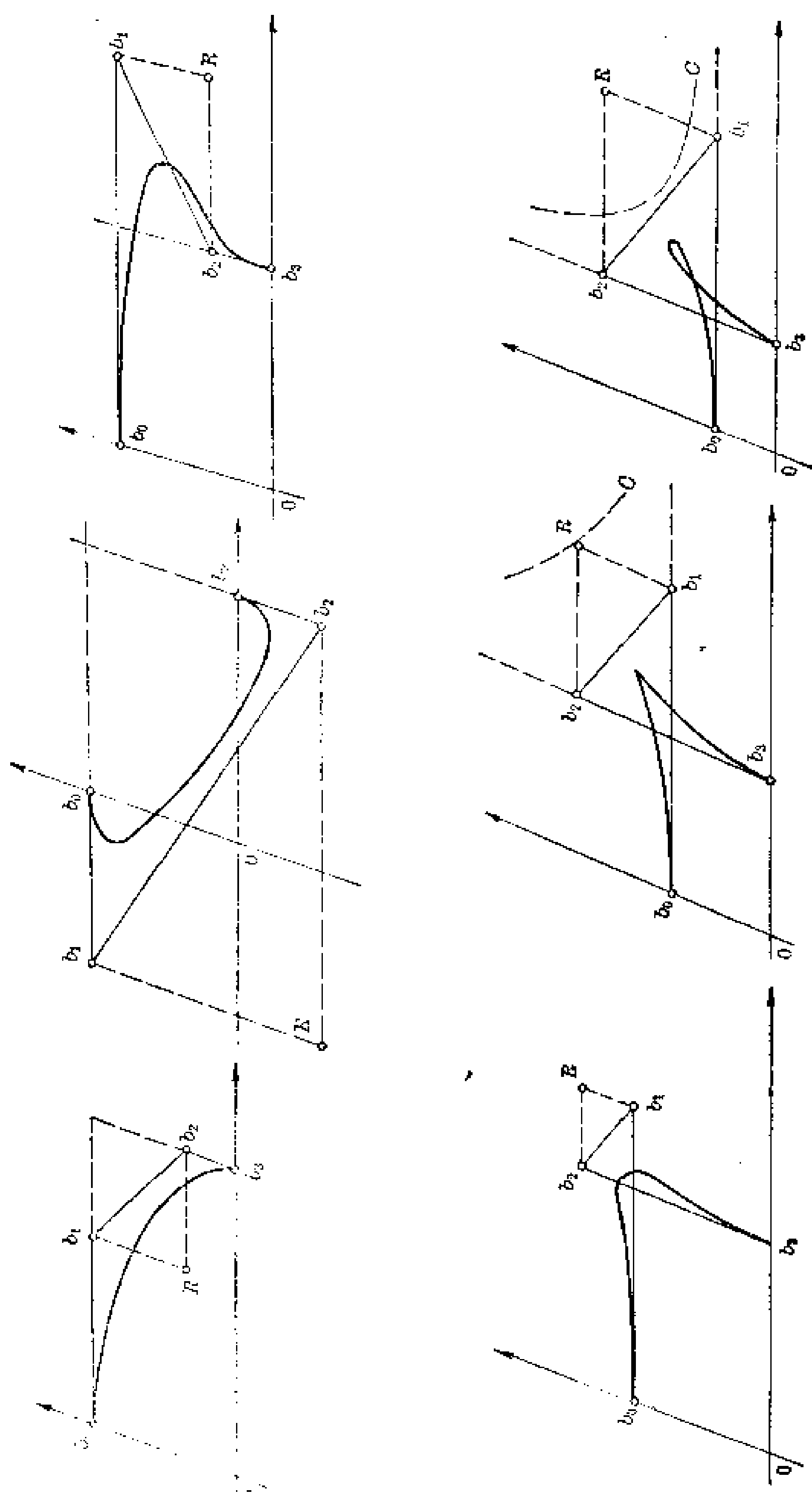
$$\boldsymbol{a}_1^*=\alpha\boldsymbol{a}_n \quad (\alpha>0). \tag{2.13}$$

对于这两条空间曲线 L 和 L^* 说来,如果还要达到 C^2 连续,那么 L 和 L^* 在连接处再要满足下列两个条件:

(1) 密切平面重合,副法线向量同向;

(2) 曲率相等.

从 Bézier 曲线的端点性质知道, L 在终点的副法线向量和 L^* 在起点的副法线向量分别是



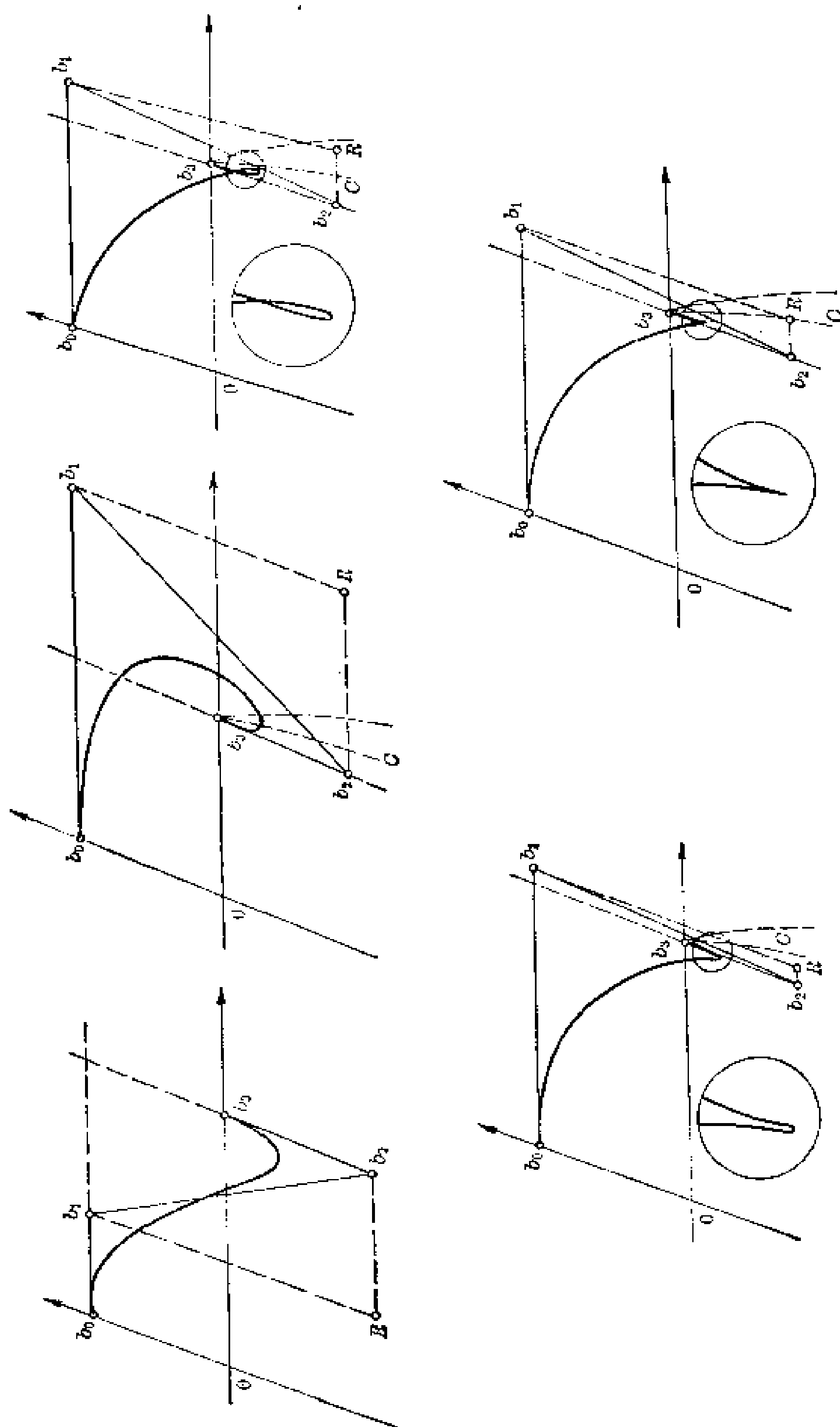


图 15

$$\boldsymbol{\gamma}(1)=n^2(n-1)(\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n), \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^*(0)=m^2(m-1)(\boldsymbol{a}_1^*\times\boldsymbol{a}_2^*). \tag{2.15}$$

条件(1)是说，四个向量 $\boldsymbol{a}_{n-1}$，$\boldsymbol{a}_n$，$\boldsymbol{a}_1^*$，$\boldsymbol{a}_2^*$ 共面(图 16)．注意到条件(2.13)，有

$$\boldsymbol{a}_2^*=-\beta\boldsymbol{a}_{n-1}+\eta\boldsymbol{a}_n, \tag{2.16}$$

式中数量 $\beta>0$，而数量 η 是任意的.

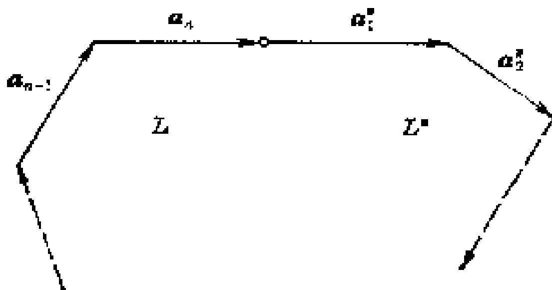


图 16

利用关系式 (2.13)～(2.16)，曲线 L 和 L^* 在连接处的曲率分别是

$$k(1)=\frac{|\boldsymbol{\gamma}(1)|}{|\boldsymbol{P}'(1)|^3}=\frac{n^2(n-1)|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{n^3|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

$$=\frac{(n-1)|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{n|\boldsymbol{a}_n|^3},$$

$$k^*(0)=\frac{|\boldsymbol{\gamma}^*(0)|}{|\boldsymbol{P}^{*\prime}(0)|^3}=\frac{m^2(m-1)|\boldsymbol{a}_1^*\times\boldsymbol{a}_2^*|}{m^3|\boldsymbol{a}_1^*|^3}$$

$$=\frac{(m-1)|\boldsymbol{a}_1^*\times\boldsymbol{a}_2^*|}{m|\boldsymbol{a}_1^*|^3}=\frac{(m-1)|\alpha\boldsymbol{a}_n\times(-\beta\boldsymbol{a}_{n-1}+\eta\boldsymbol{a}_n)|}{m\alpha^3|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

$$=\frac{(m-1)\beta|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{m\alpha^2|\boldsymbol{a}_n|^3}.$$

由条件(2)，$k(1)=k^*(0)$，得到

$$\beta=\frac{m(n-1)}{n(m-1)}\alpha^2. \tag{2.17}$$

综上所述，我们得到如下结论：两条空间 Bézier 曲线 L(n 次)和 L^*(m 次)在连接处达到 C^1 连续的充要条件是(2.13)式；达到

C^2 连续的充要条件是(2.13)，(2.16)和(2.17)式。

现在我们将转到 C^2 连续的二次和三次的两条 Bézier 样条曲线是怎样构造的问题。

(1) 在平面上给定一个凸多边形 $\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_n$，试构造一条 C^2 连续的二次 Bézier 样条曲线，其各个结点都落在凸多边形的各边上，且与该边相切。

记凸多边形各有向顶角为 $\theta_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，边向量 $\boldsymbol{a}_i$，边长 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$。设第 i 边上的结点为 P_i，分该边成 $\dfrac{x_i}{1-x_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ (图 17)。

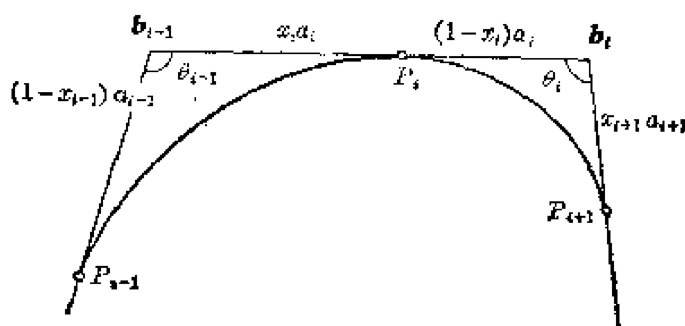


图 17

如前所述，为了在结点 P_i 处让相邻两段二次 Bézier 曲线达到 C^2 连续，充要条件是(2.13)，(2.16)和(2.17)式的成立。(2.13)中的

$$\alpha=\frac{1-x_i}{x_i}.$$

(2.16)中的

$$\beta=\frac{|\overrightarrow{b_iP_{i+1}}\times\overrightarrow{b_{i-1}P_i}|}{|\overrightarrow{P_{i-1}b_{i-1}}\times\overrightarrow{b_{i-1}P_i}|}=\frac{|x_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+1}\times x_i\boldsymbol{a}_i|}{|(1-x_{i-1})\boldsymbol{a}_{i-1}\times x_i\boldsymbol{a}_i|}$$

$$=\frac{x_{i+1}a_{i+1}\sin\theta_i}{(1-x_{i-1})a_{i-1}\sin\theta_{i-1}}.$$

(2.17)式就是 $\beta=\alpha^2$，现在是

$$\left(\frac{1-x_i}{x_i}\right)^2\frac{1-x_{i-1}}{x_{i+1}}=B_i\quad(i=2, 3, \cdots, n-1),\qquad(2.18)$$

式中记 $B_i=\dfrac{a_{i+1}\sin\theta_i}{a_{i-1}\sin\theta_{i-1}}(>0)$ 是已知量.

这样一来，C^2 连续条件归结为求解非线性方程组(2.18). 在给定了两个边界条件后(比如，给定 x_1 和 x_n)，可以用简单迭代法求解，选取初值

$$x_i^{(0)}=\frac{1}{1+\sqrt{B_i}}\quad(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1).$$

(2) 要是构造一条 C^2 连续的三次 Bézier 样条，问题反而简单些.

设已知的多边形是 $2n-1$ 边. 结点 P_i 落在第奇数边上 ($i=1,\ 3,\ \cdots,\ 2n-1$)(图 18). 沿用上一问题的方法，得到

$$\alpha=\frac{1-x_i}{x_i},$$

$$\beta=\frac{|\boldsymbol{a}_{i+1}\times x_i\boldsymbol{a}_i|}{|\boldsymbol{a}_{i-1}\times x_i\boldsymbol{a}_i|}=\frac{a_{i+1}\sin\theta_i}{a_{i-1}\sin\theta_{i-1}}\equiv B_i.$$

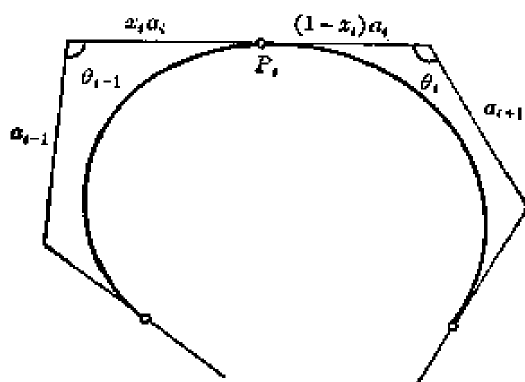


图 18

(2.17)式就是

$$\left(\frac{1-x_i}{x_i}\right)^2=B_i\quad(i=3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-3).$$

解得

$$x_i=\frac{1}{1+\sqrt{B_i}}\quad(i=3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-3).$$

边界条件 x_1 和 x_{2n-1} 可以任意给定. 为了保证 $B_i>0$，对这个已知的 $2n-1$ 边形还要附加条件如下：

$$\theta_{i-1}\theta_i>0\quad(i=3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-3).$$

§3 B样条曲线

3.1 定 义

我们在前节介绍了 Bézier 曲线，它的实质是这样：在给定了一串点列 $\boldsymbol{b}_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$后，我们选择函数族 $\{B_{i,n}(t)\}$ 作为基函数，而且由此作出向量值形式的 Bernstein 逼近．

在 1972～1974 年期间，Gordon、Riesenfeld 和 Forrest 等人拓广了 Bézier 曲线．关键在于：将基函数$\{B_{i,n}(t)\}$换成 n 次 B 样条基，从而将向量值形式的 Bernstein 逼近改成向量值形式的 B 样条逼近．他们通过这条途径构造了等距节点 B 样条曲线．

这里，我们仅仅讨论参数轴上的分割为等距的情况，因此，以后凡称作 B 样条曲线的地方，都指等距节点．

在第二章中讲过 n 次 B 样条函数的解析表达式：

$$M_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j C_{n+1}^j\left(x+\frac{n+1}{2}-j\right)_+^n.$$

它的分段表示式为：

$$M_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_{n+1}^j\left(x+\frac{n+1}{2}-j\right)^n. \qquad (3.1)$$

当 $\quad l-\frac{n+1}{2}\leqslant x\leqslant l-\frac{n+1}{2}+1 \quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ n),$

在区间$\left(-\frac{n+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$中共有 $n+1$ 段，函数值都为正．在此区间之外，函数值全部等于零．

如同 Bézier 曲线中参数的取法一样，当我们作出向量值形式的 B 样条逼近时，也总希望取参数 $t\in[0,\ 1]$．因此，将(3.1)中的自变量 x 作标准化变换$t=x-\left(l-\frac{n+1}{2}\right)$．设

$$F_{l,n}(t)=M_n\left(t+l-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_{n+1}^j(t+l-j)^n,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1 \quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

我们有

$$F_{l,n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^j C_{n+1}^j(t+n-l-j)^n,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1 \quad (l=0,\ 1,\ \cdots,\ n). \tag{3.2}$$

我们要把 B 样条函数反映在图形上，而为此先把这 $n+1$ 个函数 $F_{l,n}(t)$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 的各自变量轴迭成一条，然后把这些函数值依次首尾相接地排列为一行，这样，就构成 B 样条函数 $M_n(x)$（图 19）.

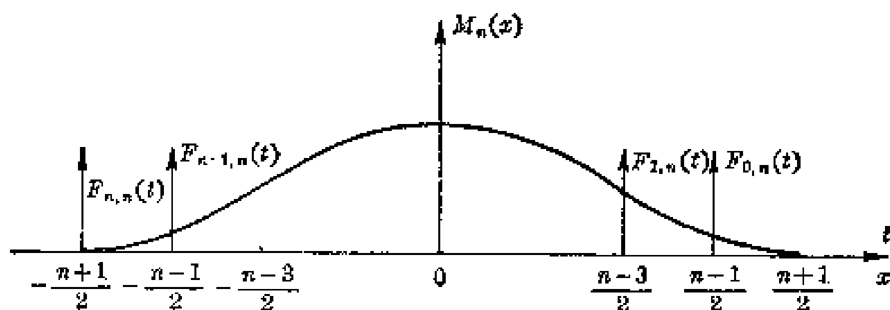


图 19

定义 给定 $m+n+1$ 个空间向量 $\boldsymbol{b}_k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n)$，称 n 次参数曲线

$$\boldsymbol{P}_{i,n}(t)=\sum_{l=0}^{n}\boldsymbol{b}_{i+l}F_{l,n}(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{3.3}$$

为 n 次 B 样条的第 i 段曲线 $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$. 它的全体称为 **n 次 B 样条曲线**，相应地，如果依次用线段连接 $\boldsymbol{b}_{i+l}$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 中相邻两个向量的终点，那末，所组成的多边形称为样条在第 i 段的 **B 特征多边形**.

由于 n 次 B 样条函数 $M_n(x)$ 是 C^{n-1} 连续，而基函数族 $\{F_{l,n}(t)\}$ 不过是 $M_n(x)$ 在自变量归范化以后的分段表示式. 因此整个 n 次 B 样条曲线达到 C^{n-1} 连续.

1976 年，日本的穗坂衛和黑田满按递推算式给出了 n 次 B 样条曲线的另一种相当直观而有趣的定义式. 下面将叙述这种定义式.

在给定 $m+n+1$ 个向量 $\boldsymbol{b}_k(k=0, 1, \cdots, m+n)$后，我们按照关于 l 的递推式定义 l 次 $\boldsymbol{MA}$ 曲线，第 i 段曲线的方程是

$$\boldsymbol{R}_{i,l}(t)=\int_t^1\omega_l(\tau)\boldsymbol{R}_{i,l-1}(\tau)d\tau+\int_0^t\omega_l(\tau)\boldsymbol{R}_{i+1,l-1}(\tau)d\tau,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1\quad (l=1, 2, \cdots, n; i=0, 1, \cdots, m),\qquad (3.4)$$

其中权函数 $\omega_l(t)\geqslant 0$，且 $\int_0^1\omega_l(\tau)d\tau=1(l=1, 2, \cdots, n)$．此外，还规定初始曲线 $\boldsymbol{R}_{k,0}(t)\equiv\boldsymbol{b}_k(k=0, 1, \cdots, m+n)$．

(3.4) 式具有明确的物理意义：把 $\omega_l(t)$ 理解为线密度函数，那末 $\int_0^1\omega_l(\tau)d\tau=1$ 表示每段曲线的重量都等于1．当 t 固定时，$\boldsymbol{R}_{i,l}(t)$ 就是图 20 中弧 $\widehat{AB}$ 的重心．当参数 t 在[0, 1]中变化时，重心轨迹 $\boldsymbol{R}_{i,l}(t)$就是 l 次 MA 曲线的第 i 段．

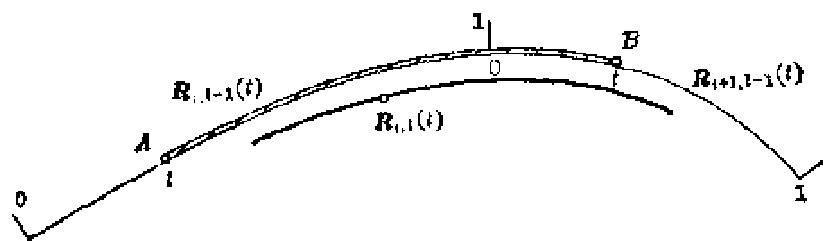


图　20

当 $l=1$ 时，(3.4)式为

$$\boldsymbol{R}_{i,1}(t)=\boldsymbol{b}_iG_{0,1}(t)+\boldsymbol{b}_{i+1}G_{1,1}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\qquad (3.5)$$

式中函数 $G_{0,1}(t)=\int_t^1\omega_1(\tau)d\tau\geqslant 0$，$G_{1,1}(t)=\int_0^t\omega_1(\tau)d\tau\geqslant 0$．由于 $G_{0,1}(t)+G_{1,1}(t)=\int_0^1\omega_1(\tau)d\tau=1$，(3.5)式表示连接 $\boldsymbol{b}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_{i+1}$ 两点的一条线段．

一般地，l 次 MA 曲线的第 i 段，仅仅与 $l+1$ 个点 $\boldsymbol{b}_{i+k}(k=0, 1, \cdots, l)$有关，而实际上它可以表成

$$\boldsymbol{R}_{i,l}(t)=\sum_{k=0}^{l}\boldsymbol{b}_{i+k}G_{k,l}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1\qquad (3.6)$$

$$(l=1, 2, \cdots, n).$$

将(3.6)代入(3.4)的两边，并作出比较，我们便得到函数 $G_{k,l}(t)$ 的递推表示式

$$G_{k,l}(t)=\int_t^1\omega_l(\tau)G_{k,l-1}(\tau)d\tau+\int_0^t\omega_l(\tau)G_{k-1,l-1}(\tau)d\tau,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ l).$$

容易看出 $G_{k,l}(t)\geqslant 0$，而且用关于 l 的归纳法的结果是

$$\sum_{k=0}^{l}G_{k,l}(t)=\int_0^1\omega_l(\tau)\Big(\sum_{k=0}^{l-1}G_{k,l-1}(\tau)\Big)d\tau=1. \qquad (3.7)$$

这表明，(3.6)所表示的曲线段 $\boldsymbol{R}_{i,l}(t)$ 的各点是关于 $l+1$ 个点 $\boldsymbol{b}_{i+k}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ l)$ 的加权平均，其中权函数依次是 $G_{k,l}(t)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ l)$.

当取所有的 $\omega_l(t)\equiv 1(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$时，对应的 n 次 MA 曲线 $\boldsymbol{R}_{i,n}(t)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$就是 n 次 B 样条曲线. 实际上，我们用归纳法得出

$$G_{l,n}(t)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n-l}(-1)^jC_{n+1}^j(t+n-l-j)^n,\ \ 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$(l=0,\ 1,\ \cdots,\ n),$$

它与(3.2)式的 $F_{l,n}(t)$ 相同.

从(3.7)式还可看到，(3.2)式的 $F_{l,n}(t)$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$也组成权函数：

$$F_{l,n}(t)\geqslant 0,\ \ \sum_{l=0}^{n}F_{l,n}(t)=1.$$

3.2 二次和三次 B 样条曲线的几何性质

前节已经阐明，一次 B 样条曲线是折线样条，于是它重合于 B 特征多边形.

在实际应用中，用得最多的是三次 B 样条曲线，其次要算是二次式. 正如高次样条函数那样，高于三次的 B 样条曲线在计算几何中一般是不用的.

本节和以后两节中，我们将主要讨论二次和三次 B 样条曲线

的性质. 由于 B 样条曲线中各段的地位是平等的，为了简化记号，在定义式(3.3)中可以取 $i=0$ 来代表样条中任一段曲线.

首先，我们考察二次 B 样条曲线. 此时，$n=2$，从(3.2)式有

$$F_{0,2}(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2,\ F_{1,2}(t)=\frac{1}{2}(-2t^2+2t+1),$$

$$F_{2,2}(t)=\frac{1}{2}t^2.$$

因此，二次 B 样条曲线(3.3)可以写成矩阵形式

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{b}_iF_{i,2}(t)=[\,t^2\ \ t\ \ 1\,]\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_0\\\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{bmatrix},\quad (3.8)$$

$$0\leqslant t\leqslant 1.$$

二次 B 样条曲线的每一段当然是抛物线，它的端点具有性质

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}(0)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_1),\\[2mm]\boldsymbol{P}(1)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2);\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{P}'(0)=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_0,\\[2mm]\boldsymbol{P}'(1)=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1.\end{cases}$$

这些关系表明：曲线段的两端点就是二次 B 特征二边形的两边上的中点，并且以两边为其端点切线(图 21).

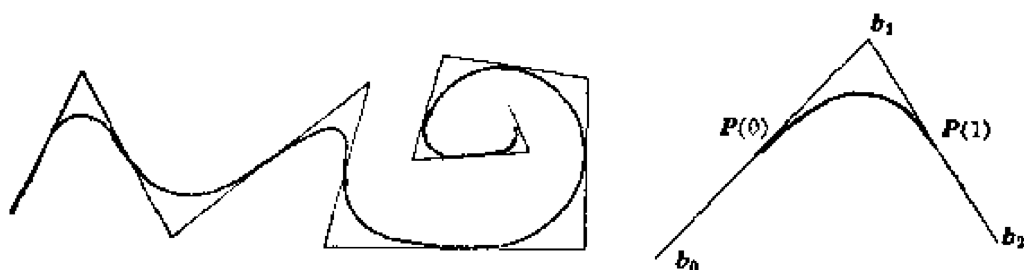


图 21

其次，三次 B 样条曲线(3.3)的矩阵表示式是(Coons[3], 1974)

$$\boldsymbol{P}(t)=[\,t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1\,]\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&0&3&0\\1&4&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_0\\\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\\\boldsymbol{b}_3\end{bmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\quad (3.9)$$

它的端点具有如下一些性质:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}(0)=\frac{1}{6}(\boldsymbol{b}_0+4\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{b}_0+\boldsymbol{b}_2}{2}\right)+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{P}(1)=\frac{1}{6}(\boldsymbol{b}_1+4\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3}{2}\right)+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2; \\ \boldsymbol{P}'(0)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_0), \\ \boldsymbol{P}'(1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_1); \\ \boldsymbol{P}''(0)=(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{b}_0-\boldsymbol{b}_1), \\ \boldsymbol{P}''(1)=(\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_2)+(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2). \end{cases} \tag{3.10}$$

因此，三次B样条曲线段(3.9)的起点 $\boldsymbol{P}(0)$ 落在 $\Delta\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$ 的中线 $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1^*$ 上离 $\boldsymbol{b}_1$ 的 $\frac{1}{3}$ 处．在这点的切向量 $\boldsymbol{P}'(0)$ 平行于 $\Delta\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$ 的底边 $\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_2$，长度为其一半．在这点的二阶导向量 $\boldsymbol{P}''(0)$ 等于中线向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_1^*}$ 的二倍．

终点的情况同起点的情况相对称，这里就不重复了．

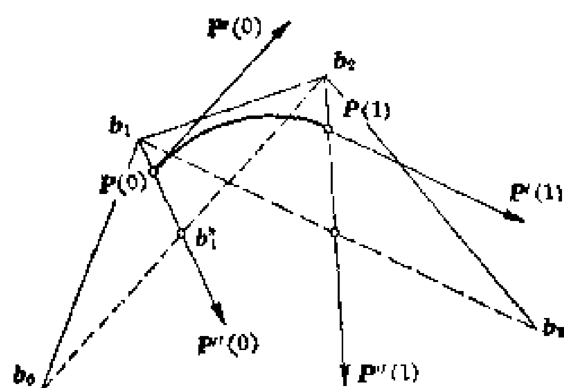


图 22

在明确了上述事项之后，这一段三次 B 样条曲线就大体确定了(图 22)．

如果B特征多边形添加一个顶点 $\boldsymbol{b}_4$，则 $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4$ 决定下一段的三次 B 样条曲线．由于上一段的终点信息同下一段的始点信息仅仅与 $\Delta\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3$ 有关，而且它们的位置向量、切向量与二阶导向量都分别相等．这又一次证明了三次 B 样条曲线的 C^2 连续性．

在 B 特征多边形上凡增加一个顶点，则相应地在样条上增加一段曲线．图 23 示意了闭的 B 特征多边形所对应的三次 B 样条曲线，B 特征多边形中任意相邻四个顶点就按 (3.9) 和一段曲线

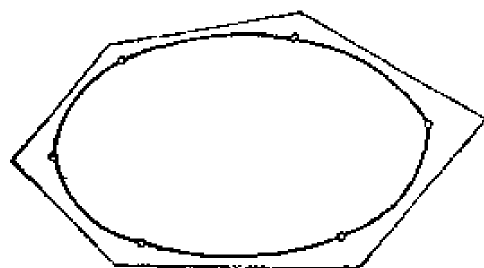


图 23

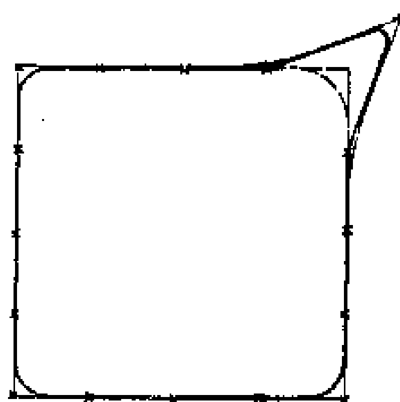


图 24

相对应.

除了上述曲线段的端点性质外，B 样条曲线还具备另一些性质：

(1) **直观性**. B 样条曲线的形状决定于 B 特征多边形，而且曲线和多边形相当逼近.

(2) **凸包性**. (3.3)式中的 $F_{l,n}(t)$ $(l=0, 1, \cdots, n)$ 组成权函数，因此样条中第 i 段曲线落在对应的第 i 段特征多边形构成的凸包之中.

(3) **局部性**. 从定义式 (3.3) 看出，改动 B 特征多边形上一个顶点，只影响以该点为中心的邻近总共 $n+1$ 段曲线. 比如，当 $n=2$ 时，只影响到三段(图 24).

(4) **保凸性**. 这个性质，其实还没有得到理论上的证明. 不错，(3.3) 的每一个分量都是 B 样条函数逼近，是一种 VD 逼近，因此是保凸的. 但是正如 Bézier 曲线一节所指出的，到了参数曲线的范围，问题就要复杂得多. 我们只能通过 B 样条函数的 VD 逼近性质，期望 B 样条曲线也具有 VD 逼近性质.

在 3.6 节，我们将证明三次 B 样条曲线是保凸的.

关于三次 B 样条曲线应当特别注意的是下面几个典型例子，它们在外形设计中是很有用的.

(1) 三顶点 $\boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ 共线.

它可以看成一个退化的 $\Delta b_0b_1b_2$: 从顶点 b_1 向底作垂足，就得出压缩变换（图 25）．于是，三顶点 b_0, b_1, b_2 所对应的三次 B 样条曲线段的一个端点 P 是这样决定的：$\overrightarrow{Pb_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{mb_1}$，其中 m 是线段 b_0b_2 的中点．而且，由于这时 $P'/\!/P''$，P 处的曲率 $k=0$，它可能是一个拐点．

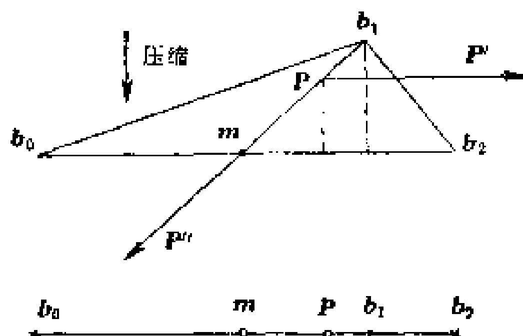


图 25

反过来，为了在 P 处的曲率 $k=0$，其必要条件也是三顶点 b_0, b_1, b_2 共线．

因此，三顶点共线也是在三次 B 样条曲线的结点处制造拐点的一种技巧．

(2) 四顶点 b_0, b_1, b_2, b_3 共线．

从 B 样条曲线的凸包性质知道，这四个顶点所对应的一段三次 B 样条曲线是一条线段．线段的两个端点 $P(0)$ 和 $P(1)$ 由上例的方法来决定（图 26）．

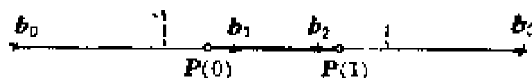


图 26

(3) 两顶点 b_1, b_2 重合．

它也可以看成 $\Delta b_0b_1b_2$，当点 $b_1\to b_2$ 时的一个退化三角形．

容易看出，三次 B 样条曲线段的端点 P 满足关系 $\overrightarrow{Pb_1}=\frac{1}{6}\overrightarrow{b_0b_1}$，而且端点曲率 $k=0$（图 27）．

由顶点 $b_0b_1b_2b_3$ 形成的一段曲线如图 28 所示．

(4) 三顶点 b_2, b_3, b_4 重合．

从例 (2) 和 (3) 立刻知道，七个顶点 $b_i(i=0, 1, \cdots, 6)$ 决定的四段三次 B 样条曲线造成图 29 的效果：三重顶点 b_2, b_3, b_4 处的

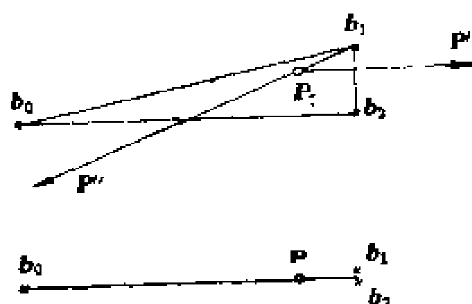


图 27

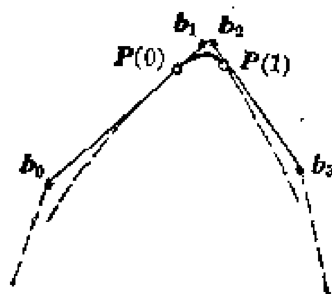


图 28

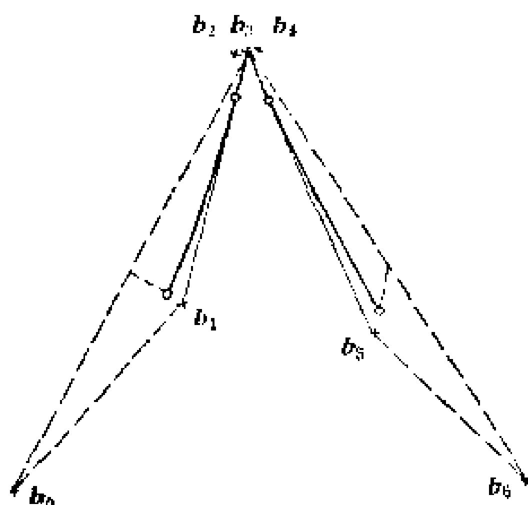


图 29

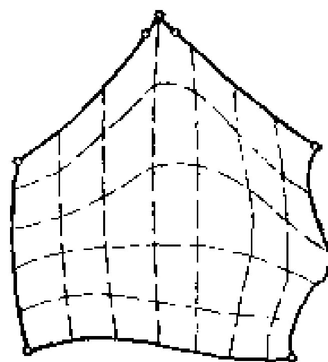


图 30

曲线是由两条线段形成的尖角．在该处，从图形上看出切向是间断的．然而这对于参数曲线来讲，确实是达到了 C^2 连续，因为在三重顶点处的一阶和二阶导向量都退化为零，但其实它是一个奇点．

这四个例子表明：

(1) 如果我们想在样条曲线上造成一段直线，只要使四个顶点共线就可以了．

(2) 为了使样条的一段和 B 特征多边形相切，只要用三顶点共线或两重顶点的技巧就行．

(3) 要使得样条通过某一顶点，或者在样条上使之形成一个尖角，运用三重顶点的技巧就可以解决问题．

比如，当 Coons 曲面片的一段边界上有一个尖角时，只须用三

重顶点的三次 B 样条就能构成这段边界，而曲面片中央仍保持光滑(图 30).

必须注意，B 样条曲线的重顶点技巧，并不是 B 样条函数的重节点技巧，但是它们却有着相仿的效果.

当我们混合使用共线顶点和重顶点的技巧时，得出的结果如图 31 所示.



图 31

3.3 平面三次 B 样条曲线的光顺性

在轮船、飞机和汽车等外形设计工作中，设计者经常要求设计出来的曲线必须光顺. 当平面三次 B 样条曲线被应用于外形设计时，自然而然地就产生一个光顺性问题：B 特征多边形要满足什么条件才能使三次 B 样条曲线光顺?

关于光顺概念的详细介绍将见于第七章，这里我们只满足于这样一个了解，就是，一根样条曲线是光顺的，其条件如下:

(1) 样条的每一段曲线都与木样条曲线偏离不大;

(2) 样条在各结点 P_i(连接处的点)处的曲率 $k_i(i=0, 1, \cdots, n)$序列是均匀的(以后称为光顺的). 比方，各结点的曲率序列为 1, 2, 4, 3, 3, 2, 1, 而且插值曲线是累加弦长三次参数样条，那末它是光顺的. 不光顺曲率序列的一个例子是 1, -2, 10, 1, -3, 2, 1.

设在平面上给定 B 特征多边形的顶点 $\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$，过

相邻三点 $\boldsymbol{b}_{i-1}$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{b}_{i+1}$ 的圆半径为 R, 称 $\frac{1}{R}$ 为这三点的圆率，记作 $K_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$. 容易算得

$$K_i=\frac{4\Delta_i}{L_iL_{i+1}L_i^*}=\frac{[\boldsymbol{P}_i'\times\boldsymbol{P}_i'']}{L_iL_{i+1}|\boldsymbol{P}_i'|}\quad(i=1, 2, \cdots, n-1),$$

式中 Δ_i 代表三角形 $\boldsymbol{b}_{i-1}\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_{i+1}$ 的有向面积，三角形的三条边长依次是 $L_i=|\overrightarrow{b_{i-1}b_i}|$, $L_{i+1}=|\overrightarrow{b_ib_{i+1}}|$, $L_i^*=|\overrightarrow{b_{i-1}b_{i+1}}|$, $\boldsymbol{P}_i'$ 和 $\boldsymbol{P}_i''$ 分别表示对应的三次 B 样条曲线在结点 $\boldsymbol{P}_i$ 的一阶和二阶导向量(图 32).

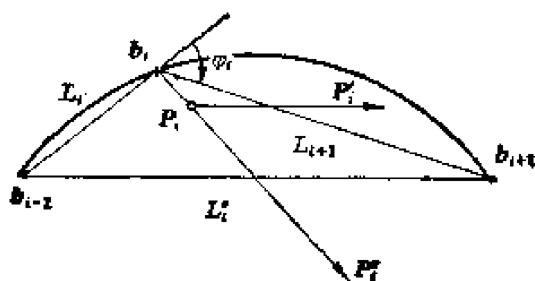


图 32

可是三次 B 样条曲线在结点 $\boldsymbol{P}_i$ 处的曲率是

$$k_i=\frac{[\boldsymbol{P}_i'\times\boldsymbol{P}_i'']}{|\boldsymbol{P}_i'|^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{k_i}{K_i}&=\frac{L_iL_{i+1}}{|\boldsymbol{P}_i'|^2}=\frac{4L_iL_{i+1}}{L_i^{*2}}=\frac{4L_iL_{i+1}}{L_i^2+L_{i+1}^2+2L_iL_{i+1}\cos\varphi_i}\\&=\frac{4L_iL_{i+1}}{(L_i+L_{i+1})^2-L_iL_{i+1}\varphi_i^2+O(\varphi_i^4)}\\&=\frac{4L_iL_{i+1}}{(L_i+L_{i+1})^2}+O(\varphi_i^2)\\&=4\lambda_i\mu_i+O(\varphi_i^2)\quad(i=1, 2, \cdots; n-1),\end{aligned}$$

式中记 $\lambda_i=\frac{L_{i+1}}{L_i+L_{i+1}}$, $\mu_i=\frac{L_i}{L_i+L_{i+1}}$. 上式又可写成

$$k_i=4\lambda_i\mu_iK_i+O(\varphi_i^2)\quad(i=1, 2, \cdots, n-1).\tag{3.11}$$

有必要时，我们还可进一步分出(3.11)中高阶项的主部

$$O(\varphi_i^2)=4K_i\lambda_i^2\mu_i^2\varphi_i^2+O(\varphi_i^4).$$

如果所给定的 B 特征多边形顶点 $\boldsymbol{b}_i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ 是等距分布，即所有 L_i 都等于同一长度 L，那末所有的 $\lambda_i=\mu_i=\frac{1}{2}$，而且(3.11)成为

$$k_i=K_i+O(\varphi_i^2) \quad (i=1, 2, \cdots, n-1).$$

当 B 特征多边形为局部小挠度时(所有的 $|\varphi_i|\leqslant 30°$)，$O(\varphi_i^2)$ 项可以略去不计. 这就表明，三次 B 样条曲线结点的曲率序列 $k_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的光顺性等价于 B 特征多边形顶点的圆率序列 $K_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的光顺性.

这时样条在结点的切向量长度是

$$|\boldsymbol{P}_i'|=\frac{1}{2}L_i^*=L+O(\varphi_i^2).$$

前章关于 Manning 的规范样条的讨论表明，这时三次 B 样条同累加弦长三次参数样条具有同样的逼近阶 $O(\varphi^4)$，所以每段曲线同木样条曲线的偏离都不大.

综上所述，我们得到结论：设所给定的 B 特征多边形满足下列条件：

(1) 顶点间隔为等距，

(2) 局部小挠度，

(3) 顶点的圆率序列 $K_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 是光顺的.

那末对应的三次 B 样条曲线一定是光顺的(刘鼎元[3]，1979).

这里我们补充一点，就是：条件(1)不一定要严格满足，而实用上只要间隔较为均匀就可以. 这时，按(3.11)应该把条件(3)改成序列 $\overline{K}_i\equiv\lambda_i\mu_iK_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 是光顺的.

但是，如果顶点间隔太不均匀，那末三次 B 样条曲线不可能光顺得好. 极端的例子就是前节图 28 所示的二重顶点情形，所对应的一段曲线在两端点处的曲率都是零，但中间处的曲率却是相当大，以致出现瘪—臌—瘪的不光顺现象.

3.4　三次 B 样条曲线的边界条件和反问题

在一些实际问题中，常常希望所设计的三次 B 样条曲线在给定的点上开始或终止，而且带有确定的切向量．也就是说，在边界上满足插值条件，而其余部分则仍是逼近．

当中间部分的 B 特征多边形顶点 $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4$, …确定之后，在始点，我们用延拓两个边界顶点 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_1$ 的办法，使得样条以给定的 $\boldsymbol{P}_0$ 为始点，$\boldsymbol{P}_0'$ 为始点切向量．图 33 示意了这个步骤，就是：

(1) 作辅助点 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\frac{1}{3}\boldsymbol{P}_0'$，即 $\overrightarrow{P_0P}=\frac{1}{3}\boldsymbol{P}_0'$;

(2) 边界顶点 $\boldsymbol{b}_1=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{P}-\boldsymbol{b}_2)$，即 $\overrightarrow{b_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{b_1b_2}$;

(3) 边界顶点 $\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{P}_0'$，即 $\overrightarrow{b_0b_2}=2\boldsymbol{P}_0'$.

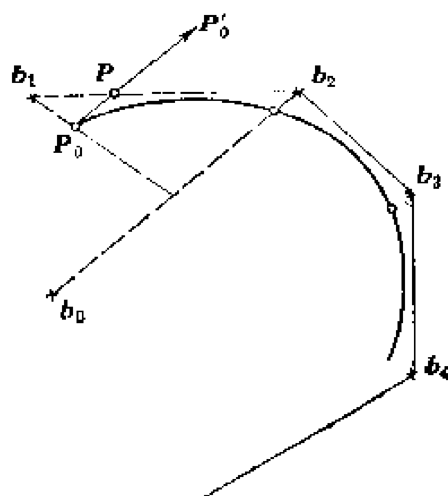


图　33

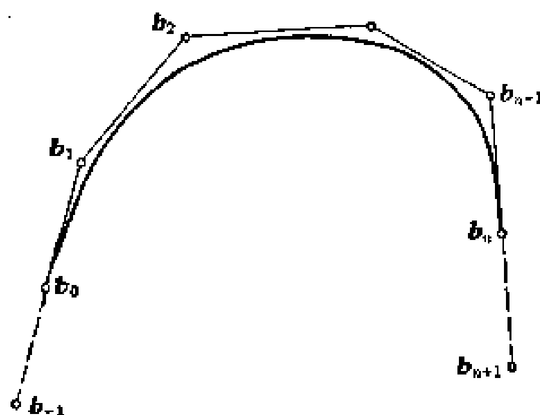


图　34

终点的边界也是同样处理的．

我们再介绍一种实用的边界条件确定方法．

假如给定了多边形的顶点 $\boldsymbol{b}_i(i=0, \cdots, n)$，希望相应的 B 样条曲线以 $\boldsymbol{b}_0$ 为始点且切于 $\overrightarrow{b_0b_1}$，以 $\boldsymbol{b}_n$ 为终点且切于 $\overrightarrow{b_{n-1}b_n}$．构造的办法十分简单：只要在首末两端各外延一个顶点 $\boldsymbol{b}_{-1}$ 和 $\boldsymbol{b}_{n+1}$，使得

$$\overrightarrow{b_{-1}b_0}=\overrightarrow{b_0b_1},\quad \overrightarrow{b_{n-1}b_n}=\overrightarrow{b_nb_{n+1}}.$$

取 $\boldsymbol{b}_j(j=-1, 0, \cdots, n+1)$ 作为 B 特征多边形顶点，由此生成的 B 样条曲线就是满足所要求的端点条件的曲线(图 34).

这样构造的 B 样条曲线的端点情况与 Bézier 曲线相同，除了端点曲率等于零这一点以外.

本章末所附有关三次 B 样条曲线的插图，都按这种办法确定端点条件.

所谓反问题，就是在已知一串点列 $\boldsymbol{P}_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 后，要找一条三次 B 样条曲线 L，使它以点列 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 为结点. 这里说的找样条 L，就是要决定它所对应的 B 特征多边形顶点 $\boldsymbol{b}_i(i=0, 1, \cdots, n)$.

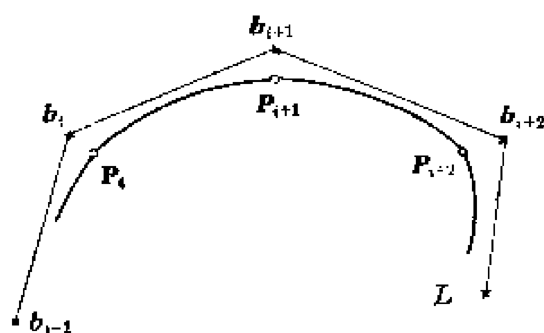


图 35

前面所讲的都是从已知多边形的顶点 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ 求出样条的结点 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 这样一类逼近问题. 而应用于插值的反问题，则是从已知插值点列 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 求出多边形顶点 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ (图 35).

从(3.10)的第一、二式看出，反问题归结到下列线性代数方程组的求解：

$$\boldsymbol{b}_{i-1}+4\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{b}_{i+1}=6\boldsymbol{P}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1). \tag{3.12}$$

如果我们补充两个适当的边界条件，方程组就有唯一解.

让我们回忆一下，在第二章讲到三次 B 样条函数用于插值时，曾导出一个三对角的连续性方程. (3.12) 只不过是它的向量值形式而已.

三次 B 样条曲线被用于插值的问题，归根到底是方程组(3.12)的求解. 对于计算机说来，这是再容易不过了.

现在我们必须提起的是，顶点 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ 间结点 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 之间相互影响的问题. 顶点 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ 的变动对于结点 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 所产生的影响如何，只要通过关系式(3.10)，就可以把它明白地表示出来. 反过来，结点

$\{\boldsymbol{P}_i\}$的变动对于顶点$\{\boldsymbol{b}_i\}$所产生的影响又是怎样呢?

当固定一个指标 k 时，让我们来看一看一个结点 $\boldsymbol{P}_k$ 的变动对所有的顶点$\{\boldsymbol{b}_i\}$究竟产生什么影响．假定方程组(3.12)的右端各项除了一个 $\boldsymbol{P}_k$ 外，全部为零．我们只考察结点个数相当多、因而不必把边界条件考虑在内的场合．这时，(3.12)的解可以表示成

$$\boldsymbol{b}_{k+j}=\sqrt{3}\lambda^{|j|}\boldsymbol{P}_k \quad (j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

式中 $\lambda=\sqrt{3}-2\approx-0.268$．这说明，结点 $\boldsymbol{P}_k$ 对于隔开它 j 个的顶点的影响是以 $\lambda^{|j|}$ 的速度迅速衰减的．第二章里讲的等距节点三次基样条也有这样的特性．从这里还可看出，三次 B 样条曲线无论在正问题或反问题中的计算都是稳定的．

因为 $\lambda^2\approx0.0718$, $\lambda^3\approx-0.0192$, $\lambda^4\approx0.00515$, 所以 $\boldsymbol{P}_k$ 所能及到的影响，当 $j=\pm4$ 时已经衰减到 10^{-3}．当所有的结点$\{\boldsymbol{P}_i\}$给定时，(3.12)中不靠近边界的顶点 $\boldsymbol{b}_i$，按线性代数方程组解的迭加原理可以近似地表成

$$\boldsymbol{b}_i=\sqrt{3}\left\{\boldsymbol{P}_i+\sum_{j=1}^{4}(\boldsymbol{P}_{i+j}+\boldsymbol{P}_{i-j})\lambda^j\right\}. \tag{3.13}$$

上式是和坐标系无关的，因此，我们不妨取 $\boldsymbol{P}_i$ 作原点．记 $\boldsymbol{P}_{i+j}$ 与 $\boldsymbol{P}_{i-j}$ 的中点为 $\boldsymbol{Q}_j$，便有

$$\boldsymbol{b}_i=2\sqrt{3}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{Q}_j\lambda^j.$$

必须指出，如同 B 样条函数一样，B 样条曲线的长处在于逼近，就是通过 B 特征多边形的顶点设计，来控制 B 样条曲线的形状．这种作法会给我们带来保凸性、局部性、直观性等等优越的性质．

当三次 B 样条曲线被用作为插值样条时，我们需要解一个三对角方程(3.12)．当然，也可以用(3.13)等显式表示的近似解，但是上述的保凸性、局部性、直观性等一系列优点都消失了．要是单单为了插值，那末累加弦长三次参数样条是一个很合适的工具，它

的优点也相当多.

当然, 在配有图象显示仪的交互设计系统中, 如果已经有了一个外形的轮廓草图, 为了找对应的 B 特征多边形顶点位置, 那末上述插值方法是值得一用的. 方程组 (3.12) 的解 (或近似表示式 (3.13)) 可以作为交互修改的初值.

3.5 B 样条曲线和 Bézier 曲线的关系

n 次 Bézier 曲线是 n 次 B 样条曲线段的一个特例, 这个问题已经明确了. 可是对它的证明, 人们却用到这样一个事实: 重节点 B 样条函数产生了一个退化的样条基, 即 Bernstein 基函数.

为了免得涉及不等距节点的 B 样条函数, 我们还是从穗坂衛和黑田满的递推算式 (3.4) 出发, 阐明 B 样条曲线段和 Bézier 曲线之间的关系.

当取权函数 $\omega_l(t)\equiv l(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 时 (这时, 权函数的积分条件修改成 $\int_0^1 \omega_l(\tau)d\tau=l$), 称这样的平移一个常向量 $-\sum_{j=1}^{n-1}\boldsymbol{P}_j$ 后的 n 次 MA 曲线段 $\boldsymbol{R}_{0,n}(t)$ 为 n 次 Bézier 曲线.

设在 (3.4) 式中取 $l=n,\ i=0$, 我们便有

$$\boldsymbol{R}_{0,n}(t)=n\int_t^1 \boldsymbol{R}_{0,n-1}(\tau)d\tau+n\int_0^t \boldsymbol{R}_{1,n-1}(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{n-1}\boldsymbol{P}_j,$$

两边对 t 求导后,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}'_{0,n}(t)&=n\{\boldsymbol{R}_{1,n-1}(t)-\boldsymbol{R}_{0,n-1}(t)\}\\&=n(E-1)\boldsymbol{R}_{0,n-1}(t).\end{aligned}$$

式中记号 E 代表推移算子, 它对点的作用是 $\boldsymbol{P}_{i+1}=E\boldsymbol{P}_i$. 容易看出, 上列微分方程的初值是 $\boldsymbol{R}_{0,n}(0)=\boldsymbol{P}_0$, 因而其解为

$$\boldsymbol{R}_{0,n}(t)=(1-t+tE)^n\boldsymbol{P}_0.$$

如把上式关于 $(1-t)$ 和 tE 二项展开, 便有

$$\boldsymbol{R}_{0,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i t^i(1-t)^{n-i}\boldsymbol{P}_i,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

这就是 n 次 Bézier 曲线的 Bernstein 基函数表示. 这样一来, 两种定义式是一致的.

因此, 我们得到结论: n 次 Bézier 曲线和 n 次 B 样条曲线段都可以统一在 MA 曲线(3.4)当中, 只要分别取

$$\omega_l(t)\equiv l \text{ 和 } \omega_l(t)\equiv 1 \quad (l=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

3.6 三次参数曲线段的三种等价表示式

很明显, 三次 Bézier 曲线和三次 B 样条曲线段都是三次参数曲线段的不同的表示式. 实际上, 从代数上看, 这三种表示式可以统一在矩阵形式之下:

$$\boldsymbol{P}(t)=[t][B]_j[\boldsymbol{b}]^{(j)},\quad 0\leqslant t\leqslant 1\quad (j=1,\ 2,\ 3), \tag{3.14}$$

式中记 $[t]=[t^3t^2t1]$, $[\boldsymbol{b}]^{(j)}=[\boldsymbol{b}_0^{(j)}\boldsymbol{b}_1^{(j)}\boldsymbol{b}_2^{(j)}\boldsymbol{b}_3^{(j)}]^T(j=1,\ 2,\ 3)$, 符号 T 表示转置. 4×4 阶矩阵 $[B]_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 依次是

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $j=1$ 时, (3.14) 就是通常三次参数曲线段的 Ferguson 表示式, 它适用于数值计算.

当 $j=2$ 时, (3.14) 表示三次 Bézier 曲线, $[\boldsymbol{b}]^{(2)}$ 表示对应的特征多边形的顶点序列.

当 $j=3$ 时, (3.14) 表示三次 B 样条曲线的一段, $[\boldsymbol{b}]^{(3)}$ 表示对应的 B 特征多边形的顶点序列.

对于每个 j, (3.14) 中第一和第二个矩阵都是固定的. 曲线

段的形状完全取决于矩阵信息 $[\boldsymbol{b}]^{(j)}$. 当 $j=1$ 时, $[\boldsymbol{b}]^{(1)}$ 仅仅同曲线段在起点的几阶导向量有关. 如果我们简单地考察 $[\boldsymbol{b}]^{(1)}$, 还是不能了解曲线段的实际形状. 当 $j=2$ 或 3 时, 情况就不同了. 由于 Bézier 曲线或 B 样条曲线对其特征多边形的逼近性质, 特征多边形顶点信息 $[\boldsymbol{b}]^{(j)}(j=2, 3)$ 对于它所对应的曲线段有着非常具体的控制能力. 这就是 Bézier 曲线和 B 样条曲线的直观性.

就同一条三次参数曲线段 L 说来, 它的三种表示式之间是可以转换的. 各 $[\boldsymbol{b}]^{(j)}(j=1, 2, 3)$ 之间只差一个满秩的线性变换:

$$[\boldsymbol{b}]^{(2)}=[B]_2^{-1}[\boldsymbol{b}]^{(1)},$$
$$[\boldsymbol{b}]^{(3)}=[B]_3^{-1}[\boldsymbol{b}]^{(1)},$$
$$[\boldsymbol{b}]^{(3)}=[B]_3^{-1}[B]_2[\boldsymbol{b}]^{(2)}.$$

因此, 只要弄清楚一般形式参数曲线段的几何特性, 作一个变换就得到同次 Bézier 曲线和 B 样条曲线的相应结果. 三次的问题已经解决. 仿此, 如果我们能找到 n 次参数曲线段的仿射不变量和实奇点及实拐点的分布, 那就可以实现对 n 次 Bézier 曲线和 B 样条曲线的控制. 这是一件无论在理论上或实践上都很有意义的事情.

曲线(3.14)如果看成向量值函数, 那末这三种表示式的差别仅仅在于基底选择的不同. 对于 $j=1, 2, 3$, 所对应的基底依次是 $\{t^3, t^2, t, 1\}$、三次 Bernstein 基和三次 B 样条基.

从几何的角度看, 同一条三次参数曲线段 L 所对应的 Bézier 多边形和 B 特征多边形之间的几何信息也是可以互相转换的. 为了简化符号, 记 Bézier 多边形的顶点 $[\boldsymbol{b}]^{(2)}\equiv[\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]$, B 特征多边形的顶点 $[\boldsymbol{b}]^{(3)}\equiv[\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3]$.

(1) 当 $[\boldsymbol{b}]^{(3)}$ 给定时, 如何求 $[\boldsymbol{b}]^{(2)}$?

从三次 B 样条曲线段和三次 Bézier 曲线的端点性质知道, $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_3$ 就是所对应曲线段的始点和终点; $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_2$ 则在线段 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$ 的两个三等分点上(图 36).

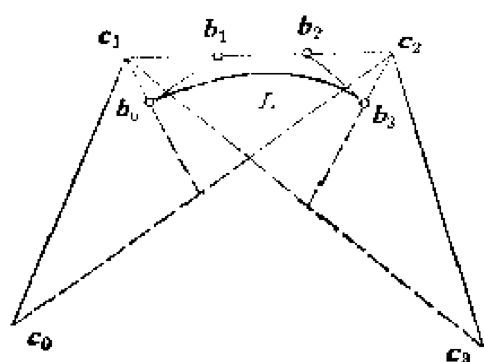


图 36

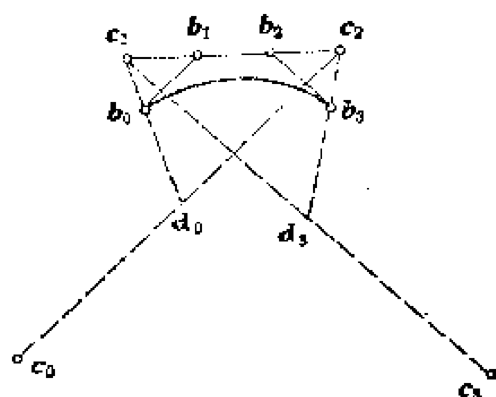


图 37

从图中看出，如果三次 B 特征多边形是凸的，三次 Bézier 多边形也一定是凸的．因此对应的曲线段 L 也是凸的，这就证明了三次 B 样条曲线的保凸性．

(2) 反过来，已知 $[\boldsymbol{b}]^{(2)}$ 时，$[\boldsymbol{b}]^{(3)}$ 是这样确定的：

将线段 $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$ 向两侧各延长自身的长度，分别得到 $\boldsymbol{c}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_2$．用线段连接 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_0$，并延长两倍到点 $\boldsymbol{d}_0$．再用线段连接 $\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{d}_0$，并延长自身的长度到点 $\boldsymbol{c}_0$．在 $\boldsymbol{c}_2$ 和 $\boldsymbol{b}_3$ 方面作对称的操作，便得到 $\boldsymbol{c}_3$（图 37）．

从图 36 和图 37 看出，三次 B 样条曲线比三次 Bézier 曲线，相对说来更逼近于自身的特征多边形．

图 38 所示意的是：对于同一个特征多边形，对应的 Bézier 曲线（虚线）同三次 B 样条曲线（实线）的比较，很明显，B 样条曲线确实比 Bézier 曲线更加逼近特征多边形．

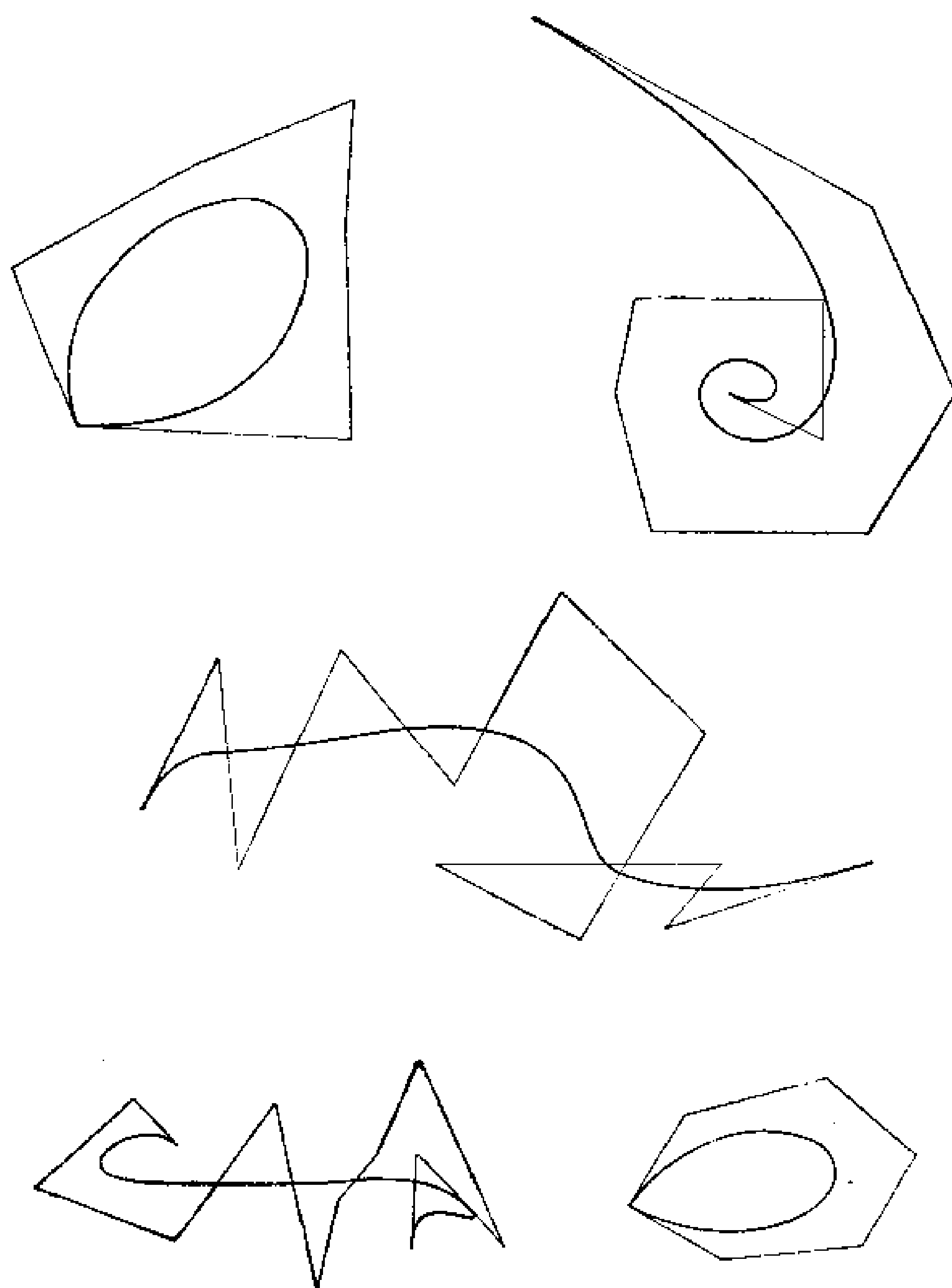


图 38

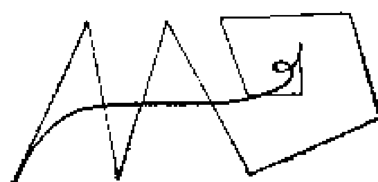
综合起来看，B 样条曲线同 Bézier 曲线相比较，除了共有直观性和保凸性的优点而外，还具有下列优越之处：(1) 修改的局部性；(2)对特征多边形逼得更近；(3)多项式次数低．因此，B 样条曲线以及它的二维拓广 B 样条曲面(见下一章)，可能是很有前途的一种外形设计工具．

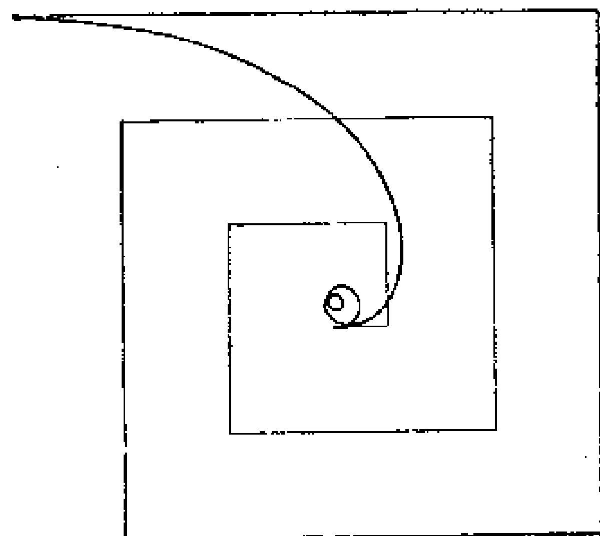
附 图

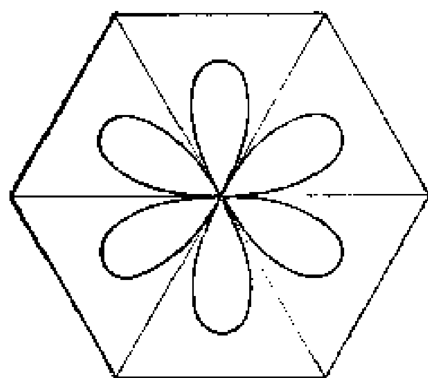
1 Bézier 曲线及其特征多边形

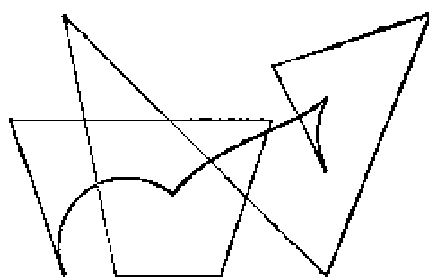






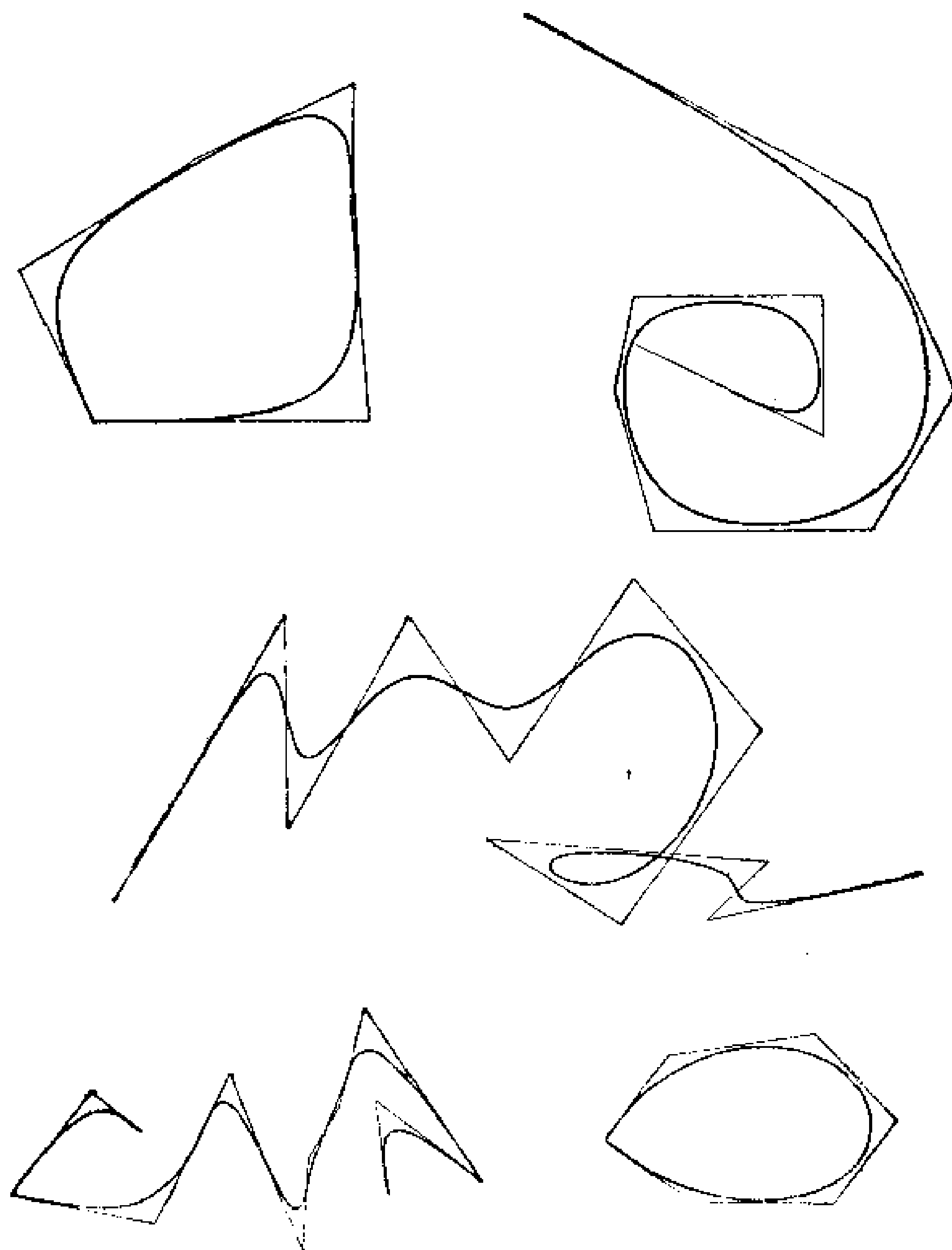


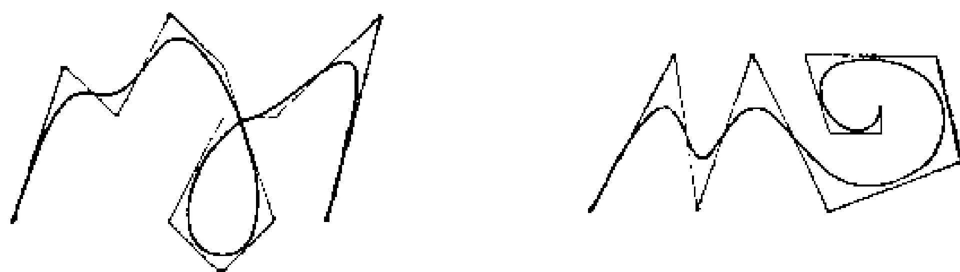


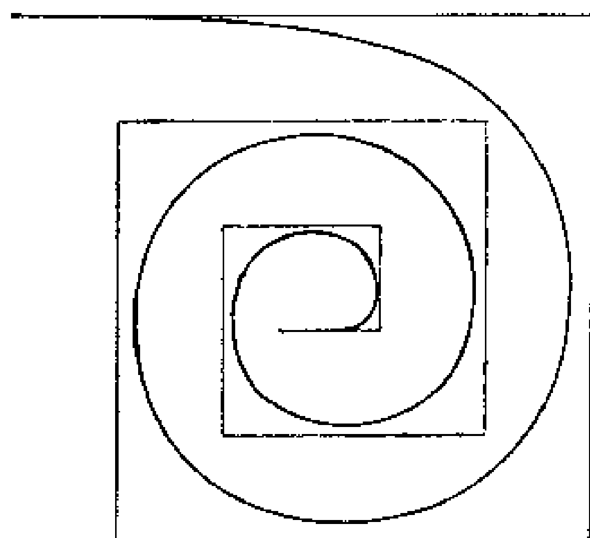


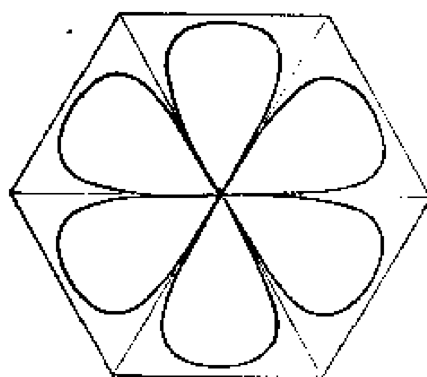
2　三次 B 样条曲线及其特征多边形

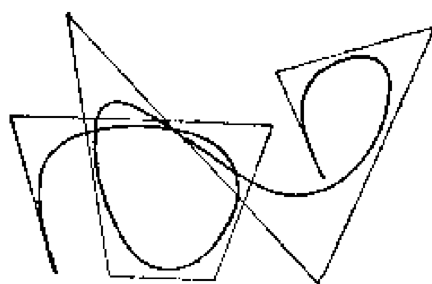
同附图 1 的图相比较，将会发现，对于同一特征多边形，三次 B 样条曲线较之 Bézier 曲线逼得更近些.





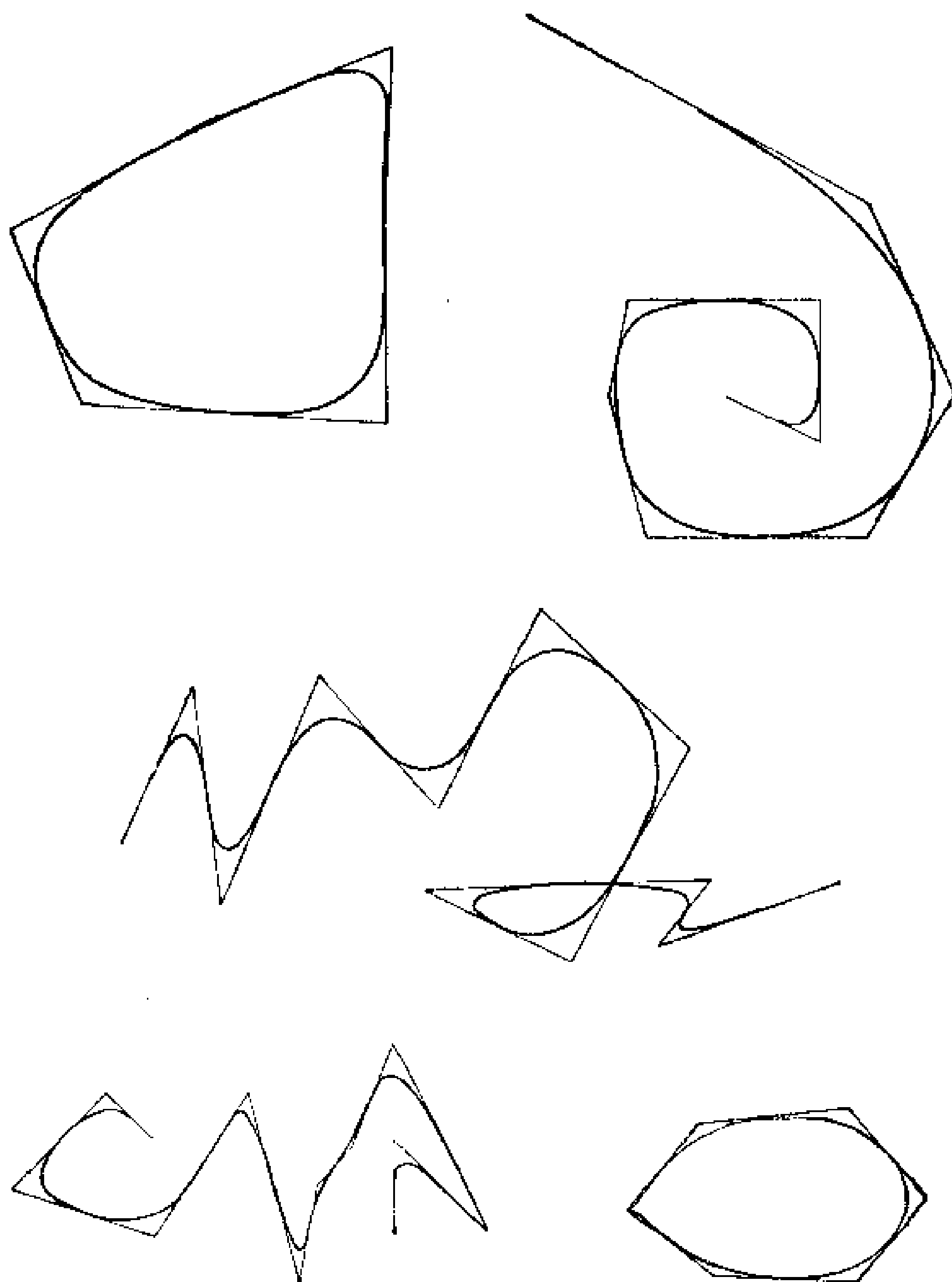


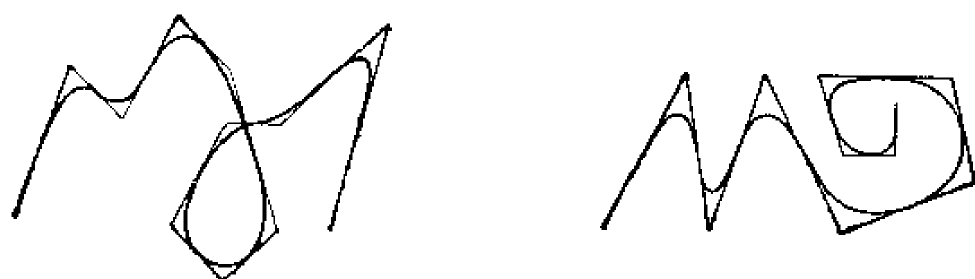


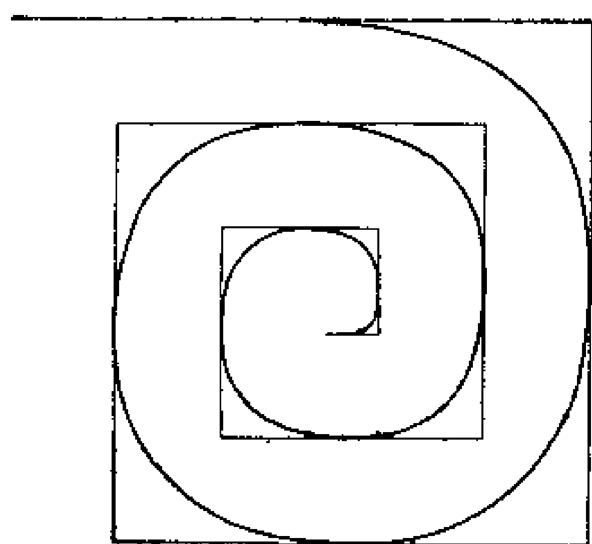


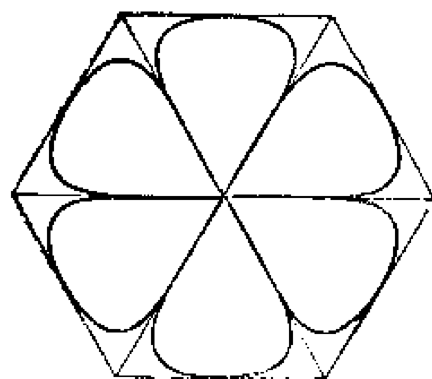
3　二次 B 样条曲线及其特征多边形

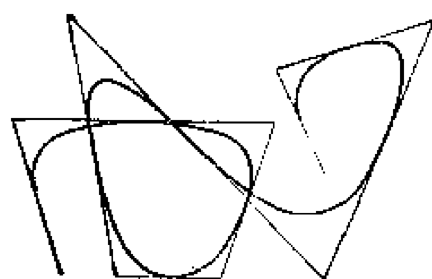
一般而言，二次 B 样条曲线比三次的更加逼近于同一特征多边形。也许光顺性比三次的略为差些.



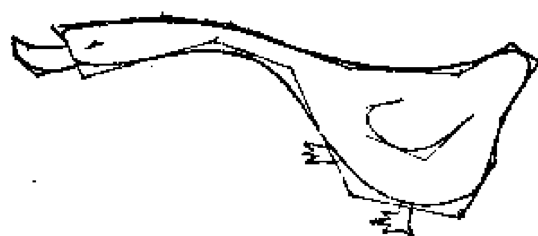








4　用三次 B 样条曲线画的动物图案









第五章 样条曲面

在船舶、飞机、汽车等几何外形的放样和设计中，所讨论的对象就整体而言，都是曲面的问题. 传统的办法是，用几族平行平面去截这个外形曲面，并以所得到几族剖面线来表示这张曲面. 比方，轮船外形就是用互相正交的三族平面所截得的横剖线、水线和直剖线表示的. 这实际上是曲线网格表示法，把曲面的问题转化为曲线的问题.

那末，网格之间的“空心”部分的位置怎么确定呢？由于传统工艺习惯和精度方面的原因，我们在造船工艺中主要关心的是曲线网格. 至于网格之间的曲面，则留给外钣展开去解决. 因此，在造船部门，只要用三族样条曲线张成一个光顺的网格，大致就够用了. 正象做灯笼的时候，主要的事情是用竹筋扎一个架子，之后只要用彩纸往上一糊就完了.

航空工业部门的情形则有些不同. 由于精度要求较高，在几何外形计算中，网格之间的曲面位置需要用一种数学方法精密地予以确定.

这就需要将一元样条函数拓广成二元样条函数，一维样条曲线拓广成二维样条曲面.

1962 年 deBoor[1]做了第一部分工作. 1964～1967 年Coons[2]

做了第二部分工作．他们的工作方法适用于曲面插值，在几何外形的数学放样中应用很广．

Bézier 曲线和 B 样条曲线在二维的拓广分别称为 Bézier 曲面和 B 样条曲面．这些方法仍然保留着以逼近为基础的特点．但一般说来，由于放弃了插值条件都不宜用作为数学放样的工具，而主要适用于自由型曲面的设计．

§1　双三次样条函数

deBoor 在 1962 年提出了一种定义在矩形区域的矩形分割上的双三次样条函数插值方法，从理论上证明了插值双三次样条函数的存在唯一性，并且建立了有效的算法．这一工作在二维样条函数的历史上有着重要的地位．

1.1　定　　义

我们在第二章已经讨论了一元的样条函数．在给定了自变量 x 轴上闭区间 $[a, b]$ 中的一个分割 Δ_x: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 后，三次样条函数的全体组成 $n+3$ 维线性空间，记作 $S(x; \Delta_x)$．

为了把一元的三次样条函数的概念移植到二元的场合，我们将在下列两个方面进行拓广：

(1) 定义域及其分割；

(2) 构造样条的函数类及连接的连续性．

最简单的和自然的一种构造如下：

(1) 采取矩形的定义域和矩形网格线的分割，即采用两个一维分割的直积．详细说来，设定义域 R: $[a, b]\otimes[c, d]$ 是 uw 平面上的一个矩形区域．我们在 u 轴和 w 轴上分别取定分割

$$\Delta_u: \qquad a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b,$$

$$\Delta_w: \qquad c=w_0<w_1<\cdots<w_m=d.$$

从此导出 R 上的一个矩形网格分割 $\Delta\equiv\Delta_u\otimes\Delta_w$，将 R 分成 mn 个子矩形

$$R_{ij}:\qquad [u_{i-1},\ u_i]\otimes[w_{j-1},\ w_j].$$

它的两条邻边长分别是

$$h_i=u_i-u_{i-1}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$
$$g_j=w_j-w_{j-1}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

直线 $u=u_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 和直线 $w=w_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 称为 Δ 分割的两族网格线. 网格线的交点 $(u_i,\ w_j)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 称为 Δ 分割的节点，总共有 $(m+1)(n+1)$ 个节点(图 1).

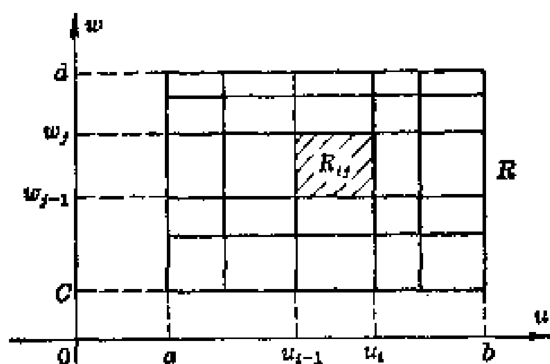


图 1

(2) 我们采用双三次函数作为构造样条的函数类，就是采用两个一元三次函数的直积. 在一些工程的问题中，设计者对网格线提出在连接处至少要达到二阶偏导数连续，用以保证整个样条函数所张成的曲面具有连续的 Gauss 曲率和平均曲率. 这相当于一元场合中对曲线的曲率要连续的要求.

定义 设在 uw 平面上的矩形区域 R: $[a,\ b]\otimes[c,\ d]$ 上给定一个矩形网格分割 $\Delta=\Delta_u\otimes\Delta_w$，其中

$$\Delta_u:\qquad a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b,$$
$$\Delta_w:\qquad c=w_0<w_1<\cdots<w_m=d.$$

凡在 R 上满足下述两条件的一个函数 $x(u,\ w)$ 称为**双三次样条函数**.

(1) 在每个子矩形 R_{ij}: $[u_{i-1},\ u_i]\otimes[w_{j-1},\ w_j]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 上，$x(u,\ w)$ 关于 u 和 w 都是三次多项式函数，即

$$x(u,\ w)=\sum_{e,f=0}^{3}B_{ef}^{ij}(u-u_{i-1})^e(w-w_{j-1})^f; \tag{1.1}$$

(2) 在整个 R 上，函数 $x(u, w)$ 的偏导数 $\frac{\partial^{(\alpha+\beta)}x(u, w)}{\partial u^{\alpha}\partial w^{\beta}}$，($\alpha$, $\beta=0, 1, 2$) 是连续的，或简记为 $x(u, w)\in C_2^4(R)$.

此外，在给定一数组 $\{x_{ij}\}$ ($i=0, 1, \cdots, n$; $j=0, 1, \cdots, m$) 之后，假如 $x(u, w)$ 在节点处再满足插值条件，即：

(3) $x(u_i, w_j)=x_{ij}$ $(i=0, 1, \cdots, n; j=0, 1, \cdots, m)$, (1.2)

则称 $x(u, w)$ 为**插值双三次样条函数**.

1.2 基样条表示

我们已经知道，在 u 轴上关于分割 Δ_u 的三次样条函数的全体组成 $n+3$ 维线性空间 $S(u; \Delta_u)$，它的基样条 $\{\varphi_s(u)\}$ ($s=0, 1, \cdots, n+2$) 满足条件：

$$\begin{cases}\varphi_s(u_i)=\delta_{si}, \quad \varphi_s'(u_0)=\varphi_s'(u_n)=0 \quad (i, s=0, 1, \cdots, n);\\ \varphi_{n+1}(u_i)=\varphi_{n+2}(u_i)=0 \quad (i=0, 1, \cdots, n);\\ \varphi_{n+1}'(u_0)=\varphi_{n+2}'(u_n)=1 \quad \varphi_{n+1}'(u_n)=\varphi_{n+2}'(u_0)=0.\end{cases}$$

在 w 轴上关于分割 Δ_w 的三次样条函数的全体组成 $m+3$ 维线性空间 $S(\omega; \Delta_w)$，它的基样条 $\{\psi_t(w)\}$ ($t=0, 1, \cdots, m+2$) 满足同样的条件：

$$\begin{cases}\psi_t(w_j)=\delta_{tj}, \ \psi_t'(w_0)=\psi_t'(w_m)=0 \quad (t, j=0, 1, \cdots, m);\\ \psi_{m+1}(w_j)=\psi_{m+2}(w_j)=0 \quad (j=0, 1, \cdots, m);\\ \psi_{m+1}'(w_0)=\psi_{m+2}'(w_m)=1, \ \psi_{m+1}'(w_m)=\psi_{m+2}'(w_0)=0.\end{cases}$$

在 R 上给定分割 $\Delta=\Delta_u\otimes\Delta_w$ 后所定义的双三次样条函数的全体构成一个线性空间 $S(u, w; \Delta)$. 由于双三次样条函数是两个一元三次样条函数的直积，即

$$S(u, w; \Delta)=S(u; \Delta_u)\otimes S(w; \Delta_w),$$

所以 $S(u, w; \Delta)$ 是 $(m+3)(n+3)$ 维线性空间，而且两个一元三次基样条的直积 $\{\varphi_s(u)\psi_t(w)\}$ ($s=0, 1, \cdots, n+2$; $t=0, 1, \cdots, m+2$) 恰好构成一组基底，称为**双三次基样条**. 这样一来，$S(u, w; \Delta)$

中的任意一个双三次样条函数一定可以表示成

$$x(u,\ w)=\sum_{s=0}^{n+2}\sum_{t=0}^{m+2}a_{st}\varphi_s(u)\psi_t(w),\ (u,\ w)\in R. \qquad (1.3)$$

对于插值双三次样条函数说来，它的表示式(1.3)中有$(m+3)(n+3)$个待定系数$\{a_{st}\}$. 插值条件$\{x_{ij}\}$有$(m+1)(n+1)$个，因此，式(1.3)中尚剩余$2(m+1)+2(n+1)+4$个自由度，而这些将由边界条件来决定. 最常用的一种边界条件是，给定下列一些数值：

(1) 矩形R的四条边界上的所有节点处的一阶法向偏导数

$$\begin{cases} p_{\alpha j}=x'_u(u_\alpha,\ w_j) & (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m;\ \alpha=0,\ n), \\ q_{i\beta}=x'_w(u_i,\ w_\beta) & (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ \beta=0,\ m). \end{cases} \qquad (1.4)$$

(2) 矩形R的四个顶点处的二阶混合偏导数

$$S_{\alpha\beta}=x''_{uw}(u_\alpha,\ w_\beta) \quad (\alpha=0,\ n;\ \beta=0,\ m). \qquad (1.5)$$

这种边界条件的主要部分是R的边界节点处的一阶法向偏导数，这相当于插值三次样条函数中的I型边界条件. 当然这里的形式要复杂一些.

1.3 存在唯一性定理

在第二章讨论插值三次样条函数时，我们曾经证明过：对于给定的分割，带着I型边界条件的插值三次样条函数是唯一存在的. 它的证明则由于其连续性方程的系数矩阵对角占优而变得十分简单. 这个命题在二元场合的拓广如下所述.

定理 给定了uw平面上的矩形区域R、它的一种矩形分割Δ和$(m+3)(n+3)$个常数

$$x_{ij},\ p_{\alpha j},\ q_{i\beta},\ S_{\alpha\beta}$$

$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m;\ \alpha=0,\ n;\ \beta=0,\ m)$$

之后，恰好存在一个插值双三次样条函数$x(u,w)$，使它是以(1.2)为插值条件，(1.4)和(1.5)为边界条件的.

证明 在 R 上关于给定分割 Δ 的任意一个双三次样条函数 $x(u, w)$ 总可以表示成基样条形式(1.3). 直接代入插值条件(1.2),并使之满足边界条件(1.4)和(1.5),那末,我们从基样条的性质立即得到

$$x_{ij}=x(u_i, w_j)=a_{ij} \quad (i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m);$$

$$p_{\alpha j}=x'_u(u_\alpha, w_j)=\begin{cases} a_{n+1, j} & \text{当 } \alpha=0, \\ a_{n+2, j} & \text{当 } \alpha=n \end{cases} \quad (j=0, 1, \cdots, m);$$

$$q_{i\beta}=x'_w(u_i, w_\beta)=\begin{cases} a_{i, m+1} & \text{当 } \beta=0, \\ a_{i, m+2} & \text{当 } \beta=m \end{cases} \quad (i=0, 1, \cdots, n);$$

$$S_{\alpha\beta}=x''_{uw}(u_\alpha, w_\beta)=\begin{cases} a_{n+1, m+1} & \text{当 } \alpha=0,\ \beta=0, \\ a_{n+1, m+2} & \text{当 } \alpha=0,\ \beta=m, \\ a_{n+2, m+1} & \text{当 } \alpha=n,\ \beta=0, \\ a_{n+2, m+2} & \text{当 } \alpha=n,\ \beta=m, \end{cases}$$

上列各式的右端无重复地出现了(1.3)式的全部系数 a_{st} ($s=0, 1, \cdots, n+2;\ t=0, 1, \cdots, m+2$), 而且函数 $x(u, w)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial^{(\alpha+\beta)}x(u, w)}{\partial u^\alpha \partial w^\beta}$ ($\alpha, \beta=0, 1, 2$) 的连续性, 则由于(1.3)中每个一元基样条是 C^2 连续而得到保证. 这就表明了, 以(1.2)为插值条件和以(1.4)和(1.5)为边界条件的插值双三次样条函数是唯一存在的. 定理证毕.

当我们应用上述定理到单个子矩形 R_{ij} 时,便可知道: 只要给定了 R_{ij} 的四个顶点上的函数值, 两个方向的一阶偏导数以及二阶混合偏导数等十六个数据,也就是给定了四阶方阵

$$[C]_{ij}=\left[\begin{array}{cc|cc} x_{i-1, j-1} & x_{i-1, j} & q_{i-1, j-1} & q_{i-1, j} \\ x_{i, j-1} & x_{ij} & q_{i, j-1} & q_{ij} \\ \hline p_{i-1, j-1} & p_{i-1, j} & S_{i-1, j-1} & S_{i-1, j} \\ p_{i, j-1} & p_{ij} & S_{i, j-1} & S_{ij} \end{array}\right], \qquad (1.6)$$

那末, R_{ij} 上的双三次函数 $x(u, w)$ 就被唯一地决定了. 矩阵 $[C]_{ij}$

中各元素的意义分别是

$x_{ij}=x(u_i, w_j)$, $p_{ij}=x'_u(u_i, w_j)$, $q_{ij}=x'_w(u_i, w_j)$, $S_{ij}=x''_{uw}(u_i, w_j)$.

容易看出，R_{ij} 上的双三次函数一定可以唯一地写成

$$x(u, w)=[(u-u_{i-1})][A(h_i)][C]_{ij}[A(g_j)]^T[(\omega-\omega_{j-1})]^T,$$
$$(u, w)\in R_{ij}, \tag{1.7}$$

式中记号$[(u-u_{i-1})]$代表关于变元$(u-u_{i-1})$的 1×4 阶矩阵：

$$[(u-u_{i-1})]=[(u-u_{i-1})^3, (u-u_{i-1})^2, (u-u_{i-1}), 1],$$

$[A(h_i)]$代表 4×4 阶矩阵：

$$[A(h_i)]=\begin{bmatrix} \frac{2}{h_i^3} & -\frac{2}{h_i^3} & \frac{1}{h_i^2} & \frac{1}{h_i^2} \\ -\frac{3}{h_i^2} & \frac{3}{h_i^2} & -\frac{2}{h_i} & -\frac{1}{h_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

符号 T 则表示矩阵的转置．事实上，只要将 R_{ij} 的四个顶点坐标 (u_{i-1}, w_{j-1}), (u_{i-1}, w_j), (u_i, w_{j-1}), (u_i, w_j) 代入(1.7), $(1.7)'_u$, $(1.7)'_w$ 和$(1.7)''_{uw}$ 四个式子的两边，立即明了矩阵$[C]_{ij}$ 中十六个元素是分别具有前述各项意义的．这里的 $(1.7)'_u$ 意味着 (1.7) 式两边对 u 求偏导，等等．

这样一来，双三次样条函数 $x(u, w)$在子矩形 R_{ij} 上的表示式 (1.7)完全决定于矩阵$[C]_{ij}$．$[C]_{ij}$ 的左上角四个元素由插值条件 (1.2)直接给出．其余诸 p、q、S 共十二个元素则需要按照边界条件(1.4)和(1.5)，并通过求解连续性方程来获得．

首先，固定 $w=w_j$，则函数 $x(u, w_j)\in S(u; \Delta_u)$．由第二章的三次样条函数的$m$连续性方程，我们有

$$\lambda_i p_{i-1,j}+2p_{ij}+\mu_i p_{i+1,j}=3\left[\lambda_i\frac{x_{ij}-x_{i-1,j}}{h_i}+\mu_i\frac{x_{i+1,j}-x_{ij}}{h_{i+1}}\right]$$
$$(i=1, 2, \cdots, n-1), \tag{1.9}$$

式中 $\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$.

在边界条件(1.4)式中，(1.9)的边界切向 p_{0j} 和 p_{nj} 是已知的，由此解出 $p_{ij}(i=0, 1, \cdots, n)$. 然后取 $j=0, 1, \cdots, m$, 我们便求得 R 上所有节点 (u_i, w_j) 处沿 u 方向的一阶偏导数 $p_{ij}(i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m)$.

对称地，当固定 $u=u_i$ 时，则函数 $x(u_i, w)\in S(w; \Delta_w)$. 于是得出相应的 m 连续性方程

$$\lambda_j^* q_{i,j-1}+2q_{ij}+\mu_j^* q_{i,j+1}=3\left[\lambda_j^*\frac{x_{ij}-x_{i,j-1}}{g_j}+\mu_j^*\frac{x_{i,j+1}-x_{ij}}{g_{j+1}}\right]$$
$$(j=1, 2, \cdots, m-1), \tag{1.10}$$

式中记 $\lambda_j^*=\dfrac{g_{j+1}}{g_j+g_{j+1}}$, $\mu_j^*=\dfrac{g_j}{g_j+g_{j+1}}$. 其边界切向 q_{i0} 和 q_{im} 也是从(1.4)获得的，由此我们解出 $q_{ij}(j=0, 1, \cdots, m)$. 这样，$R$ 上所有节点 (u_i, w_j) 处沿 w 方向的一阶偏导数 $q_{ij}(i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m)$就全部确定了.

为了计算所有节点处的二阶混合偏导数 S_{ij}, 我们首先固定 $u=u_i$, 则函数 $x'_u(u_i, w)\in S(w; \Delta_w)$. 它在各节点 w_j 处的函数值 $x'_u(u_i, w_j)=p_{ij}$ 已从(1.9)求得. 因此我们得到关于变元 w 的三次样条函数的 m 连续性方程

$$\lambda_j^* S_{i,j-1}+2S_{ij}+\mu_j^* S_{i,j+1}=3\left[\lambda_j^*\frac{p_{ij}-p_{i,j-1}}{g_j}+\mu_j^*\frac{p_{i,j+1}-p_{ij}}{g_{j+1}}\right]$$
$$(j=1, 2, \cdots, m-1). \tag{1.11}$$

假如还给定了连续性方程(1.11)的边界切向 S_{i0} 和 S_{im} 的话，那末就解得 $S_{ij}(j=0, 1, \cdots, m)$. 这样，$R$ 上所有节点 (u_i, w_j) 处的二阶混合偏导数 $S_{ij}(i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m)$ 也就全部确定了.

其实，(1.11)的边界切向 S_{i0} 和 S_{im} 是这样求得的：沿 R 的两条边界 $w=w_0$ 与 $w=w_m$, 函数 $x'_w(u, w_0)$ 与 $x'_w(u, w_m)\in S(u; \Delta_u)$.

它们在各节点 u_i 处的函数值 $x'_w(u_i, w_0)=q_{i0}$ 和 $x'_w(u_i, w_m)=q_{im}$ 可从(1.10)获得. 于是我们有关于变元 u 的 m 连续性方程

$$\lambda_i S_{i-1,\beta}+2S_{i\beta}+\mu_i S_{i+1,\beta}=3\left[\lambda_i\frac{q_{i\beta}-q_{i-1,\beta}}{h_i}+\mu_i\frac{q_{i+1,\beta}-q_{i\beta}}{h_{i+1}}\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\ \ \beta=0,\ m. \tag{1.12}$$

它们的边界条件由 (1.5) 式提供. 由此解出 S_{i0} 和 $S_{im}(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

至此,矩阵(1.6)中所有各元均已求得,因此 R 上的双三次样条函数 $x(u, w)$ 也被确定了,它在各子矩形 R_{ij} 上的表示式就是(1.7).

剩下的一个问题是: $x(u, w)$ 在 R 上的连续性是否达到 $C_2^4(R)$? 回答是肯定的. 因为,由插值双三次样条函数的存在唯一性定理得知,凡是满足插值条件(1.2)和边界条件(1.4),(1.5)的双三次样条函数只有一个,并且达到了 $C_2^4(R)$ 连续.

综上所述,在 uw 平面上给定了矩形区域 R 及矩形网格分割 Δ 后,插值双三次样条函数 $x(u, w)$ 的计算步骤如下:

(1) 给定插值条件(1.2),边界条件(1.4)和(1.5).

(2) 依次解三对角方程组(1.9),(1.10),(1.12),(1.11),求出 p_{ij}, q_{ij}, $S_{ij}(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ \ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$,从而获得矩阵(1.6). 这些方程组共有 $2n+m+5$ 个,但它们的系数矩阵只有两种形状,分别以数组 λ_i, $\mu_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 及数组 λ_j^*, $\mu_j^*(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$ 为特征.

(3) 为了求 R 中任意一点 (u^*, w^*) 所对应的函数值 $x(u^*, w^*)$,只要找出整数指标 i 同 j,使得 $(u^*, w^*)\in R_{ij}$,然后代入(1.7)式计算.

定义在矩形域上带有矩形网格分割的双三次样条函数,已经被 deBoor 解决得相当漂亮而又彻底. 关键之处在于:这里的二维网格分割是两个一维分割的直积;而且双三次函数又是两个一元三次函数的直积,这样,我们实际上已经把二元的问题转化成两个

方向的一元问题了.

对于定义在一般平面区域上带有任意分割的二元样条函数这类问题的研究,则要困难得多. 一般说来,迄今所获得的理论结果和具体算法都是初步的, 它还是一个发展中的课题 (Schumaker, 1976). 比如, 在二维有限元方法中, 最有意义的是关于平面区域的三角形分割. 目前虽然已有不少具体的构造方法, 能够保证插值二元样条函数的一阶偏导数连续, 但是如果希望使得二阶以上偏导数连续, 样条函数的次数将要急剧升高, 引来了问题的复杂化,很难实用于计算(王仁宏, 1975).

当我们把双三次样条函数应用于几何外形设计时, 正象三次样条函数一样,只适用于小挠度的场合. 否则,光顺性同样可能被破坏. 为了适用于大挠度和多值的场合, 需要对双三次函数作些改造. 其中最成功的一种拓广, 是把双三次变元参数化, 用以构造成双三次参数曲面. 这些就是我们接着要介绍的双三次 Coons 曲面、双三次 Bézier 曲面和双三次 B 样条曲面.

§2 Coons 曲 面

2.1 混 合 函 数

混合函数 F_0, F_1, G_0, G_1 在 Coons 曲面的生成和表示中起着重要的作用. 它们的功能是将给定的四个端点向量加权平均而产生一条曲线段, 或者把四条给定的边界曲线"混合"起来生成一张曲面. 因此,混合函数也有权函数或调配函数的称呼.

定义在区间[0, 1]上的四个三次函数

$$\begin{cases} F_0(u)=2u^3-3u^2+1, \\ F_1(u)=-2u^3+3u^2, \\ G_0(u)=u^3-2u^2+u, \\ G_1(u)=u^3-u^2 \end{cases} \quad u\in[0,\ 1] \tag{2.1}$$

称为**三次混合函数**. 它们具有下列性质:

$$\begin{cases} F_0(0)=1, \ F_0(1)=0, \\ F_0'(0)=0, \ F_0'(1)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} F_1(0)=0, \ F_1(1)=1, \\ F_1'(0)=0, \ F_1'(1)=0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} G_0(0)=0, \ G_0(1)=0, \\ G_0'(0)=1, \ G_0'(1)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} G_1(0)=0, \ G_1(1)=0, \\ G_1'(0)=0, \ G_1'(1)=1. \end{cases} \tag{2.2}$$

反之,凡是满足(2.2)式的四个三次函数 F_0, F_1, G_0, G_1 一定具有(2.1)的形式. 这是因为,任意一个三次函数恰好被它在两个端点处的函数值和一阶导数值所唯一决定. 实际上混合函数最本质的特性正反映在 (2.2) 式中, (2.1) 不过是它的某个具体实现罢了. 一般地,任何满足(2.2)式的 C^1 类函数都可以作为混合函数使用. 函数 F_0, F_1, G_0, G_1 的示意图如下(图 2).

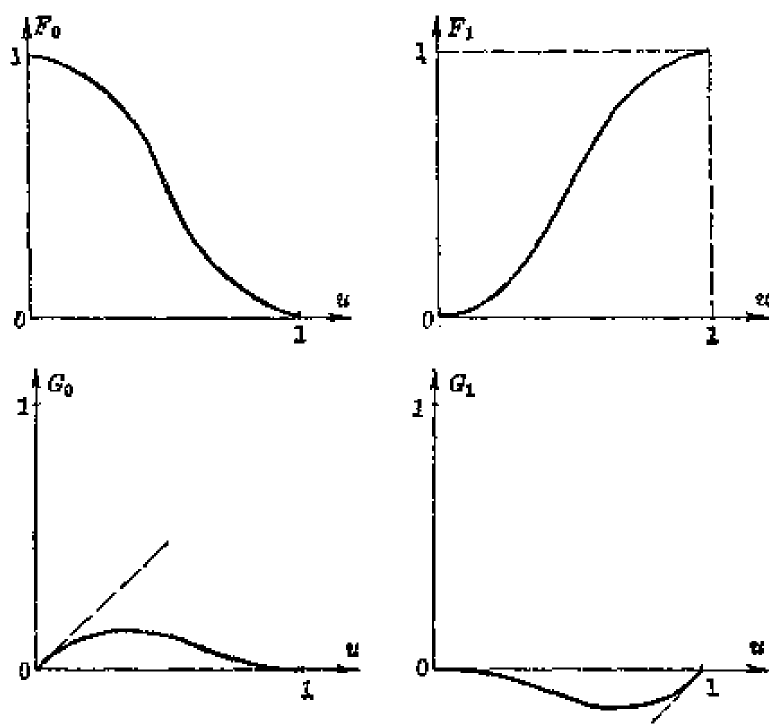


图 2

我们可以这样来看这四个混合函数的功能: 假定任意给定了四条向量 $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_1$, 经过混合函数 F_0, F_1, G_0, G_1 作用后,我们得到的一条三次参数曲线段

$$\boldsymbol{P}(u)=F_0(u)\boldsymbol{P}_0+F_1(u)\boldsymbol{P}_1+G_0(u)\boldsymbol{m}_0+G_1(u)\boldsymbol{m}_1,$$

$$u \in [0, 1], \qquad (2.3)$$

必定是以 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 为其两个端点，$\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_1$ 为两条端点切向量的．这一事实从混合函数的性质(2.2)便可明了。实际上，(2.3)式是三次参数曲线段的 Hermite 插值表示式．由此看出，F_0 和 F_1 是专门控制两个端点位置而且同两条端点切向量无关的；G_0 和 G_1 的作用则恰恰与此相反．或者讲，F_0 和 G_0 只对左端点起作用，F_1 和 G_1 的作用则仅限于右端点．

2.2 双三次曲面

我们知道，一些空间曲面是经常可用定义在区域 D 上的双参数向量函数予以表示的：

$$\boldsymbol{r}(u, w) = [x(u, w),\ y(u, w),\ z(u, w)] \quad (u, w) \in D, \qquad (2.4)$$

这里 $D = [0, 1] \otimes [0, 1]$ 是参数平面上的单位正方形区域．$\boldsymbol{r}(u, 0)$，$\boldsymbol{r}(u, 1)$，$\boldsymbol{r}(0, w)$，$\boldsymbol{r}(1, w)$ 表示曲面的四条边界．$\boldsymbol{r}(0, 0)$，$\boldsymbol{r}(0, 1)$，$\boldsymbol{r}(1, 0)$，$\boldsymbol{r}(1, 1)$ 是曲面的四个顶点，称为**角点**．

在 Coons 曲面的表示式中，大量使用着由 Coons 创造的一套表示参数曲面和参数曲线的简缩符号．掌握了它，一些运算就显得非常简洁而又明确，不会引起任何混淆．在 Coons 的记号中，参数 u 和 w 之间的逗号以及向量的各分量之间的逗号都省略掉．当仅仅讨论一张曲面的时候，向量函数 $\boldsymbol{r}(u, w)$ 前面的字母 $\boldsymbol{r}$ 连同其后的圆括号也一起省略掉，因而(2.4)的简写式是

$$uw = [x(uw)\,y(uw)\,z(uw)].$$

符号 $u0$，$u1$，$0w$，$1w$ 分别表示曲面的四条边界曲线．曲面的四个角点则简记成 00，01，10，11(图 3)．

曲面的偏导向量的记号是

$$uw_u \equiv \frac{\partial(uw)}{\partial u}, \quad uw_{wu} \equiv \frac{\partial(uw)}{\partial w \partial u}, \quad u0_w \equiv \frac{\partial(uw)}{\partial w}\bigg|_{w=0},$$

$$u0_u \equiv \frac{\partial(uw)}{\partial u}\bigg|_{w=0} = \frac{d(u0)}{du}, \quad 10_{uw} \equiv \frac{\partial(uw)}{\partial u \partial w}\bigg|_{\substack{u=1 \\ w=0}},$$

等等.

向量函数 $u0_w$ 称为边界曲线 $u0$ 上的边界斜率. 其它三条边界曲线上的边界斜率分别是 $u1_w$, $0w_u$, $1w_u$. 二阶偏导向量 $0w_{uu}$, $1w_{uu}$, $u0_{ww}$, $u1_{ww}$ 称为边界曲率. 四个角点处的二阶混合偏导向量 00_{uw}, 01_{uw}, 10_{uw}, 11_{uw} 称为角点扭矢.

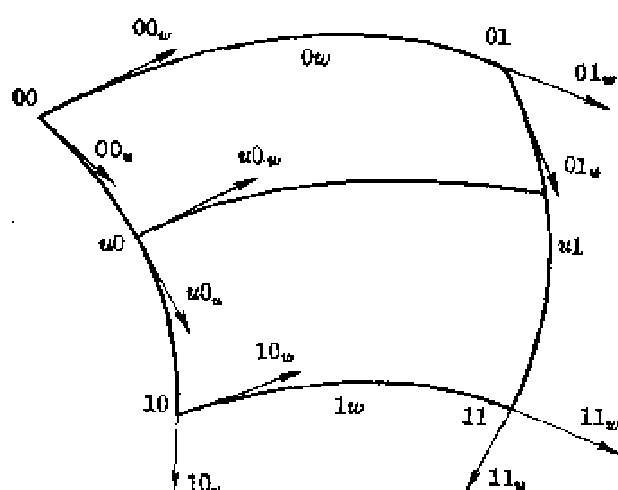


图 3

以后, 我们经常用到由四个混合函数写成的四维行向量的样式, 而且省略了变元 u. 因此, (2.1) 的矩阵表示是

$$[F_0F_1G_0G_1]=[U][M], \tag{2.5}$$

其中 1×4 阶矩阵 $[U]=[u^3u^2u1]$ 称为变元 u 的基本向量, 而且 4×4 阶矩阵

$$[M]=\begin{bmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

当混合函数被写成形如(2.5)式的行向量时, 我们约定: 基本向量总是关于参数 u 的. 相反, 当它被写成列向量时, 基本向量总是关于参数 w 的. 就是说:

$$\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}=[M]^T[W]^T, \tag{2.6}$$

式中 $[W]=[w^3w^2w1]$, T 如前表示矩阵的转置.

现在，我们对上一节的双三次函数(1.7)着手参数化，用以构造向量形式的双三次曲面．也就是说，把 u 和 w 取作两个独立参数，将(1.7)的左端项拓广为参数曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}(u, w)$，而将右端项中的矩阵$[C]$拓广为相应的向量矩阵$[\boldsymbol{C}]$，但仍保留(1.6)式各元素本来的意义．这样，

$$[\boldsymbol{C}]=\left[\begin{array}{c|c} \text{角　点} & w\text{切向量} \\ \hline u\text{切向量} & \text{扭　矢} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} 00 & 01 & 00_w & 01_w \\ 10 & 11 & 10_w & 11_w \\ \hline 00_u & 01_u & 00_{uw} & 01_{uw} \\ 10_u & 11_u & 10_{uw} & 11_{uw} \end{array}\right],$$

称为角点信息矩阵(参照前页图 3)．我们还把定义域统一成为单位正方形区域 D，因此 (1.7) 中的指标 i 和 j 都消失了，而且 $h_i=g_i=1$，$u_{i-1}=w_{j-1}=0$．如果我们注意到矩阵 $[A(1)]=[M]$，那末在现用的记号下**双三次曲面**方程就可写成

$$uw=[F_0\ F_1\ G_0\ G_1]\left[\begin{array}{cc|cc} 00 & 01 & 00_w & 01_w \\ 10 & 11 & 10_w & 11_w \\ \hline 00_u & 01_u & 00_{uw} & 01_{uw} \\ 10_u & 11_u & 10_{uw} & 11_{uw} \end{array}\right]\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \end{bmatrix},\ (u,\ w)\in D. \tag{2.7}$$

又利用(2.5)和(2.6)，我们把上式更简写成

$$uw=[U][M][\boldsymbol{C}][M]^T[W]^T. \tag{2.8}$$

Coons 曲面有几种类型，双三次曲面(2.7)是其中最有实用价值的一种，因为角点信息矩阵 $[\boldsymbol{C}]$ 是比较容易求得的．在几何外形计算中使用的所谓 Coons 曲面，实际上都是指这种双三次曲面．(2.7)或(2.8)式也通称双三次 Coons 曲面．

角点信息矩阵$[\boldsymbol{C}]$的元素排列非常对称整齐，可以分成四组．左上角一块代表四个角点的位置向量，右上角和左下角表示边界曲线在四个角点处的切向量，几何意义都是非常明显的．由于曲面的四条边界曲线都是三次参数曲线段，它们的位置和形状也就

完全决定于这三块元素. $[C]$的右下角一块则是角点扭矢，它们同曲面边界的形状毫无关系，调整扭矢只会造成曲面内部形状的变化. 例如，当我们取所有的角点扭矢为零时，(2.7)式变为所谓Ferguson 曲面，这时曲面在四个角点邻近会变得相当平坦，造型并不理想. 遗憾的是，曲面内部形状对于扭矢的依赖关系如何，人们难以掌握，以致在一段时期内扭矢的几何意义很不明确. 因此，在构造曲面的时候怎样把扭矢确定下来，往往变成一个难点，直到Bézier 曲面问世之后，扭矢之谜才得以解开. 这些将在下一节中予以介绍.

2.3 双三次曲面的合成

我们在第三章已经看到，将三次参数曲线段合成 C^2 连续的样条曲线，便会有多种样式的结构. 现在要把一块一块的双三次曲面装配起来，使成为一张样条曲面，这个构造当然是比较复杂的.

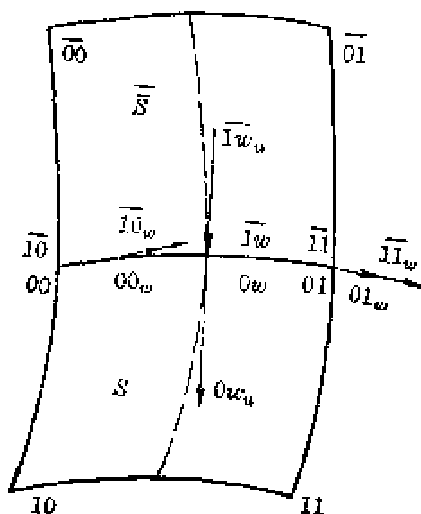


图 4

先让我们来考察两块双三次曲面 S 和 $\bar{S}$ 的连接. 它们都用 (2.7) 式表示，只是在 $\bar{S}$ 的角点信息矩阵诸元素的顶上都加一横，以示同 S 的区别.

(1) 为了让 S 和 $\bar{S}$ 达到 C^0 连续，也就是让它们相邻接的边界曲线完全重合：$0w \equiv \overline{1w}$，充要条件是

$$00=\overline{10},\ 01=\overline{11},\ 00_w=\overline{10}_w,\ 01_w=\overline{11}_w. \qquad (2.9)$$

这是因为三次参数曲线段完全决定于它们的两个端点向量及两个端点切向量的缘故.

(2) 要使 S 和 $\bar{S}$ 达到 C^1 连续，也就是在相邻接的边界曲线上的每点处，S 和 $\bar{S}$ 的切平面必须重合，除了(2.9)成立而外，我

们将给出一个充分条件. 从(2.7)可以求得

$$0w_u=[00_u\ \ 01_u\ \ 00_{uw}\ \ 01_{uw}]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix},$$

$$\overline{1w}_u=[\overline{10}_u\ \ \overline{11}_u\ \ \overline{10}_{uw}\ \ \overline{11}_{uw}]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix},$$

所以,只要存在常数因子 $\lambda>0$, 使得

$$[00_u\ \ 01_u\ \ 00_{uw}\ \ 01_{uw}]=\lambda[\overline{10}_u\ \ \overline{11}_u\ \ \overline{10}_{uw}\ \ \overline{11}_{uw}],\quad(2.10)$$

就有

$$0w_u=\lambda\overline{1w}_u,$$

从而就达到 S 和 $\bar{S}$ 的 C^1 连续(图 4).

(3) 为了使两个双三次曲面之间达到 C^2 连续,一种最简单而有效的连接方法就是: 回到双三次函数(1.7)式去,并增加双三次函数的另外两个分量 $y(u, w)$ 和 $z(u, w)$, 用以组成向量形式的双三次样条曲面:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(uw)&=[x(uw)y(uw)z(uw)]\\&=[(u-u_{i-1})][A(h_i)][\boldsymbol{C}]_{ij}[A(g_j)]^T[(w-w_{j-1})]^T,\\&\quad(u, w)\in R_{ij}\ \ (i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m),\end{aligned}\quad(2.11)$$

其中向量矩阵$[\boldsymbol{C}]_{ij}$ 的左上角由给定的型值点 $\boldsymbol{r}_{ij}(i=0, 1, \cdots, n;$ $j=0, 1, \cdots, m)$所提供. 其余三块的元素则是由求解连续性方程(1.9), (1.10), (1.11), (1.12) 来获得的, 当然 $\boldsymbol{r}(uw)$ 的三个分量要独立成三批处理. 至于边界条件(1.4)和(1.5), 我们也用向量形式适当予以给定.

余下的问题是: 参数平面(u, w)上的定义域 R 及其分割 Δ 应该如何决定呢? 通常的办法是, 先适当固定某行 j_0, 而取 u 方向的

节点间距 $h_i=|\boldsymbol{r}_{i,j_0}-\boldsymbol{r}_{i-1,j_0}|$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 再适当固定某列 i_0, 而取 w 方向的节点间距 $g_j=|\boldsymbol{r}_{i_0,j}-\boldsymbol{r}_{i_0,j-1}|$ $(j=1, 2, \cdots, m)$. 令定义域 $R=[0, H]\otimes[0, G]$, 这里的

$$H=\sum_{i=1}^{n} h_i,\ G=\sum_{j=1}^{m} g_j.$$

这样,我们就确定了定义域 R 及其分割 Δ. 这种取法实际上是构造了两个方向上的累加弦长参数分割. 如前所述,累加弦长参数三次样条曲线具有良好的光顺性,因此现在构造的样条曲面的网格曲线将是光顺的. 当然,运用这种方法时所需要的一个前提,就是型值点 $\boldsymbol{r}_{ij}(i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, m)$之间的间隔要比较均匀. 倘若一侧间距很大,而另一侧间距很小,象扇形分布那样,我们将不会收到好的效果. 前面讲的所谓适当固定某行 j_0,是指这一行上各点 $\boldsymbol{r}_{i,j_0}$ 的间隔大致是一个平均数(图 5).

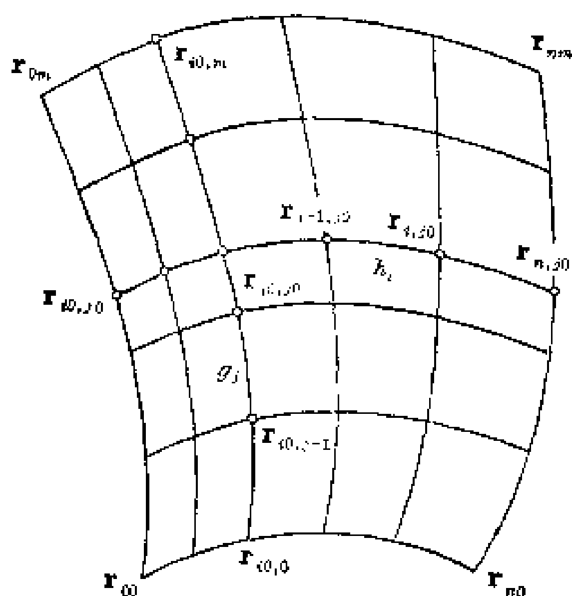


图 5

由于(2.11)的每一个分量在 R 上都是 $C_2^{\frac{1}{2}}$ 连续,双三次样条曲面确实是达到了C^2连续的.

现在介绍的方法,由于其简单易行,连续性高,因而是使用双三次样条曲面来插值一批空间点列的最实用的方法. 一些实际部门所讲的 Coons 曲面插值,多半是采用了这套办法.

双三次样条曲面插值,除了刚才指出的对于型值点阵 $\boldsymbol{r}_{ij}$ 均匀性分布的一个限制外,另一个不足之处是缺乏灵活性. 这就是说,在边界条件被给定之后,各块曲面都被唯一地决定了,局部修改也成为不可能.

2.4 一般的 Coons 曲面

最一般的 Coons 曲面是在合成时采用了自由的装配式结构而获得的. 在两块相连接的曲面的交界线上,如有必要,对于曲面的位置,斜率、曲率,甚至更高阶偏导向量都是能够使之连续的. 当然,连续的阶数越高,曲面的表示式就越复杂.

这里我们不作详细推导,而仅仅列出它们的表示式. 用到的混合函数将不局限于三次函数. 凡是满足(2.2)式的适当阶的连续函数都可以作为混合函数. Coons 本人曾经选用过三角函数和 B 样条函数来构造混合函数.

具有指定的四条边界曲线 $u0$, $u1$, $0w$, $1w$ 和四个边界斜率 $u0_w$, $u1_w$, $0w_u$, $1w_u$ 的 Coons 曲面可写成

$$uw=-[-1\ F_0\ F_1\ G_0\ G_1]\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & u0 & u1 & u0_w & u1_w \\ \hline 0w & 00 & 01 & 00_w & 01_w \\ 1w & 10 & 11 & 10_w & 11_w \\ 0w_u & 00_u & 01_u & 00_{uw} & 01_{uw} \\ 1w_u & 10_u & 11_u & 10_{uw} & 11_{uw} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} -1 \\ F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \end{array}\right]. \tag{2.12}$$

等号右端的五阶方阵是很有规律的: 已经给定的八个边界曲线条件安排在第一行和第一列中; 从八个边界条件中得到的十六个角点信息,组成右下方的四阶子方阵,它的结构与双三次曲面(2.8)中的角点信息矩阵[$\boldsymbol{C}$]的完全一样. 从混合函数的性质(2.2),我们可以直接验证表示式(2.12)的正确性.

要使这一类 Coons 曲面在连接时达到 C^1 连续,相邻两块曲面必须具有公共的边界曲线和边界斜率. 如果我们改变这些公共的边界曲线或边界斜率,那末就能够调节曲面内部的形状,因此收到局部修改的功效.

假定要使相邻两块曲面达到 C^2 连续,光靠上述表示式是不够

的，因为除了曲面的边界曲线和边界斜率而外，还需要指定四个边界曲率 $u0_{ww}$, $u1_{ww}$, $0w_{uu}$, $1w_{uu}$. 因此，我们必须采用三对 C^2 连续的混合函数：F_0, F_1; G_0, G_1; H_0, H_1. 这些函数还要满足下列条件：

$$\begin{cases} F_\alpha(\beta) = G'_\alpha(\beta) = H''_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \\ F'_\alpha(\beta) = F''_\alpha(\beta) = G_\alpha(\beta) = G''_\alpha(\beta) = H_\alpha(\beta) = H'_\alpha(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha,\ \beta = 0,\ 1).$$

由此可见，我们只要采用五次多项式，便可构造上述的三对混合函数. 关于各函数的具体表示，这里从略.

具有指定的边界曲线、边界斜率和边界曲率的 Coons 曲面可写成

$$uw = -[-1\ F_0\ F_1\ G_0\ G_1\ H_0\ H_1]$$

$$\times \left[\begin{array}{c:cccc:cc} 0 & u0 & u1 & u0_w & u1_w & u0_{ww} & u1_{ww} \\ \hdashline 0w & 00 & 01 & 00_w & 01_w & 00_{ww} & 01_{ww} \\ 1w & 10 & 11 & 10_w & 11_w & 10_{ww} & 11_{ww} \\ 0w_u & 00_u & 01_u & 00_{uw} & 01_{uw} & 00_{uww} & 01_{uww} \\ 1w_u & 10_u & 11_u & 10_{uw} & 11_{uw} & 10_{uww} & 11_{uww} \\ \hdashline 0w_{uu} & 00_{uu} & 01_{uu} & 00_{uuw} & 01_{uuw} & 00_{uuww} & 01_{uuww} \\ 1w_{uu} & 10_{uu} & 11_{uu} & 10_{uuw} & 11_{uuw} & 10_{uuww} & 11_{uuww} \end{array}\right] \begin{bmatrix} -1 \\ F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \\ H_0 \\ H_1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

读者容易看出，等号右端的七阶方阵与(2.12)的五阶方阵具有共同的规律性.

这样一来，曲面装配的灵活性确实增加了. 可是，随之而来的问题是每块曲面都需要人为地指定一些边界条件. 连续阶越高，边界条件就越多. 这件事情对于实际使用 Coons 曲面的工程技术人员说来是太麻烦了. 因而，本段所介绍的一般形式的 Coons 曲面，并没有象双三次曲面那样在实际应用部门得到广泛的使用. 不过，从理论的角度来看，象(2.12)和(2.13)那样构造曲面的方

式，是相当有意思的.

§3 Bézier 曲 面

3.1 定 义

我们在上一节利用了直积的想法，把三次参数曲线段扩张成为双三次曲面. 本节仍然运用这个想法，很自然地把Bézier 曲线拓广成 Bézier 曲面.

定义 给定了$(m+1)(n+1)$个空间点列$\boldsymbol{b}_{ij}(i=0, 1, \cdots, n; j=0, 1, \cdots, m)$后，称$m\times n$次参数曲面

$$\boldsymbol{P}(u, w)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_{i,n}(u)B_{j,m}(w)\boldsymbol{b}_{ij},\quad 0\leqslant u, w\leqslant 1,\qquad (3.1)$$

为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$**次 Bézier 曲面**，式中$\{B_{i,n}(u)\}$为$n$次 Bernstein 基函数族. 逐次用线段连接点列$\boldsymbol{b}_{ij}(i=0, 1, \cdots, n; j=0, 1, \cdots, m)$中的相邻两点组成的空间网格称为**特征网格**.

Bézier 曲线的许多性质，比如凸包性质，端点性质，逼近性质等等，在 Bézier 曲面的场合也相应地成立，这里不再一一列举了.

在实际应用的时候，次数m和n均不宜超过5. 否则，网格对于曲面的控制力将会减弱，这同曲线场合的情况是相仿的. 其中最重要的场合是$m=n=3$，即双三次 Bézier 曲面，我们将专门设立一段来介绍它. 在这之前，先举两个低次的 Bézier 曲面的例子.

(1) 当$m=n=1$时，我们有双一次 Bézier 曲面：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(u, w)=&(1-u)(1-w)\boldsymbol{b}_{00}+(1-u)w\boldsymbol{b}_{01}\\&+u(1-w)\boldsymbol{b}_{10}+uw\boldsymbol{b}_{11},\quad 0\leqslant u, w\leqslant 1.\end{aligned}\qquad (3.2)$$

可以证明，(3.2)表示双曲抛物面(马鞍面)上的一块曲面片，它的边界由四条直线段组成. 事实上，我们先把(3.2)改写成双一次参数形式

$$\boldsymbol{P}(u,\ w)=uw\boldsymbol{a}_{11}+u\boldsymbol{a}_{10}+w\boldsymbol{a}_{01}+\boldsymbol{b}_{00}, \tag{3.3}$$

式中 $\boldsymbol{a}_{01}=\boldsymbol{b}_{01}-\boldsymbol{b}_{00}$, $\boldsymbol{a}_{10}=\boldsymbol{b}_{10}-\boldsymbol{b}_{00}$, $\boldsymbol{a}_{11}=\boldsymbol{b}_{11}-(\boldsymbol{b}_{00}+\boldsymbol{a}_{10}+\boldsymbol{a}_{01})$ (图 6). 接着, 在取定了某个仿射坐标系后, 把曲面的位置向量 $\boldsymbol{P}(u,\ w)$ 和 $\boldsymbol{b}_{00}$ 的分量分别记作

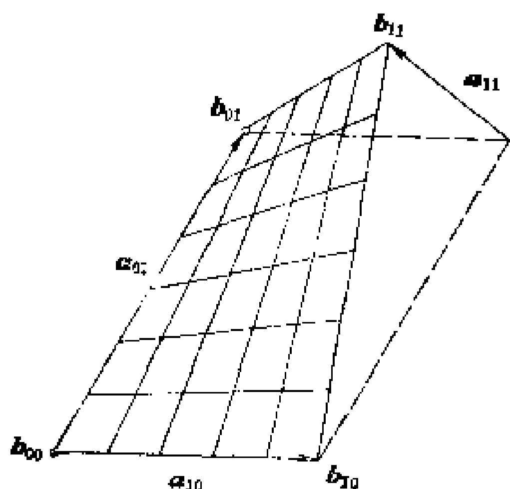


图 6

$$\boldsymbol{P}(u,\ w)=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_{00}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

那末(3.3)的分量表示式是

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=[A]\begin{bmatrix} uw \\ u \\ w \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

式中三阶方阵 $[A]$ 的第一、第二、第三列的元素依次为向量 $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{10}$, $\boldsymbol{a}_{01}$ 的三个分量.

当 $\boldsymbol{b}_{00}$, $\boldsymbol{b}_{10}$, $\boldsymbol{b}_{01}$, $\boldsymbol{b}_{11}$ 四个顶点共面时, 从 Bézier 曲面的凸包性质知道, 这时双一次 Bézier 曲面(3.2)是平面. 如果把这种平凡情况除外, 那末三向量 $\boldsymbol{a}_{11}$, $\boldsymbol{a}_{10}$, $\boldsymbol{a}_{01}$ 不共面, 因此 $[A]^{-1}$ 必存在. 这时, (3.4)的等价表示式是

$$\begin{bmatrix} uw \\ u \\ w \end{bmatrix}=[A]^{-1}\begin{bmatrix} x-b_1 \\ y-b_2 \\ z-b_3 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

经过仿射坐标变换

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}=[A]^{-1}\begin{bmatrix} x-b_1 \\ y-b_2 \\ z-b_3 \end{bmatrix},$$

从(3.5)便得知：在新的仿射坐标系中，双一次 Bézier 曲面(3.2)上任一点的坐标应满足

$$\bar{x}=\overline{yz},$$

这就是双曲抛物面周知的方程.

(2) 当 $m=n=2$ 时，我们有双二次 Bézier 曲面：

$$\boldsymbol{P}(u,\ w)=\sum_{i,j=0}^{2}B_{i,2}(u)B_{j,2}(w)\boldsymbol{b}_{ij},\ 0\leqslant u,\ w\leqslant 1. \qquad (3.6)$$

很明显，这个曲面的边界曲线和参数坐标曲线都是抛物线. 由九个顶点所组成的双二次特征网格的周围八个顶点决定了四条边界曲线. 中间一个顶点 $\boldsymbol{b}_{11}$ 可以用来控制曲面内部的形状，但对边界曲线不发生影响(图 7).

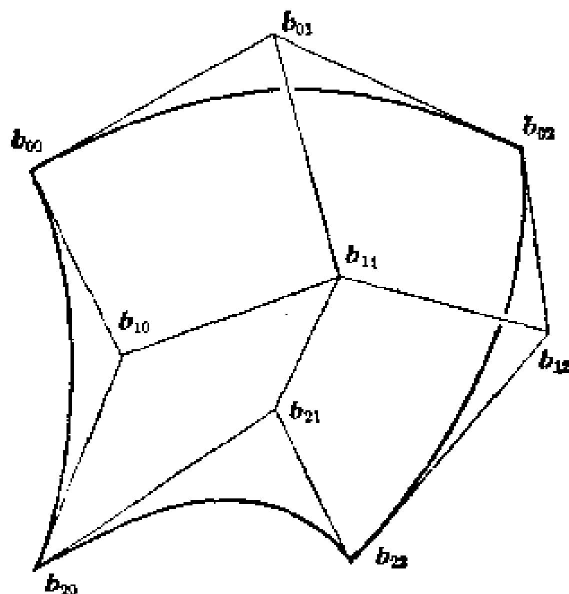


图 7

从 Bézier 曲面对于其特征网格的逼近性质知道，在固定四条边界曲线的情况下，我们通过顶点 $\boldsymbol{b}_{11}$ 的适当选择，便可使得曲面或凸或凹，或臌或瘪. 这样一种控制方式极其直观而又简易.

3.2 双三次 Bézier 曲面

当 $m=n=3$ 时，我们得到下列的双三次 Bézier 曲面的矩阵表示式：

$$\boldsymbol{P}_b(u,\ w)=[B_{0,3}(u),\ B_{1,3}(u),\ B_{2,3}(u),\ B_{3,3}(u)]$$

$$\times\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{00} & \boldsymbol{b}_{01} & \boldsymbol{b}_{02} & \boldsymbol{b}_{03} \\ \boldsymbol{b}_{10} & \boldsymbol{b}_{11} & \boldsymbol{b}_{12} & \boldsymbol{b}_{13} \\ \boldsymbol{b}_{20} & \boldsymbol{b}_{21} & \boldsymbol{b}_{22} & \boldsymbol{b}_{23} \\ \boldsymbol{b}_{30} & \boldsymbol{b}_{31} & \boldsymbol{b}_{32} & \boldsymbol{b}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{0,3}(w) \\ B_{1,3}(w) \\ B_{2,3}(w) \\ B_{3,3}(w) \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

或者仿效双三次 Coons 曲面的简缩写法，

$$\boldsymbol{P}_b(u,\ w)=[U][N][\boldsymbol{b}][N]^T[W]^T, \tag{3.8}$$

式中向量矩阵$[\boldsymbol{b}]$就是 (3.7) 中的 4×4 次特征网格顶点矩阵，而且

$$[N]=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

这样一来，对于同一张双三次参数曲面而言，它的表示式可以写成 Bézier 形式(3.8)，也可以写成 Coons 形式(2.8)：

$$\boldsymbol{P}_c(u,\ w)=[U][M][\boldsymbol{C}][M]^T[W]^T.$$

由于对于所有的$(u,\ w)\in[0,\ 1]\otimes[0,\ 1]$，必须成立

$$\boldsymbol{P}_b(u,\ w)=\boldsymbol{P}_c(u,\ w),$$

所以我们获得

$$[N][\boldsymbol{b}][N]^T=[M][\boldsymbol{C}][M]^T. \tag{3.9}$$

引入矩阵

$$[\boldsymbol{D}]=[N]^{-1}[M]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

便有

$$[\boldsymbol{b}]=[D][\boldsymbol{C}][D]^T=$$

$$\begin{bmatrix} 00 & 00+\frac{1}{3}00_w & 01-\frac{1}{3}01_w & 01 \\ 00+\frac{1}{3}00_u & 00+\frac{1}{3}(00_u+00_w)+\frac{1}{9}00_{uw} & 01+\frac{1}{3}(01_u-01_w)-\frac{1}{9}01_{uw} & 01+\frac{1}{3}01_u \\ 10-\frac{1}{3}10_u & 10-\frac{1}{3}(10_u-10_w)-\frac{1}{9}10_{uw} & 11-\frac{1}{3}(11_u+11_w)+\frac{1}{9}11_{uw} & 11-\frac{1}{3}11_u \\ 10 & 10+\frac{1}{3}10_w & 11-\frac{1}{3}11_w & 11 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

矩阵等式 (3.10) 显示了双三次 Bézier 曲面的特征网格的顶点矩阵$[\boldsymbol{b}]$同双三次 Coons 曲面的角点信息矩阵$[\boldsymbol{C}]$之间的联系. 它的几何形态如图 8 所示.

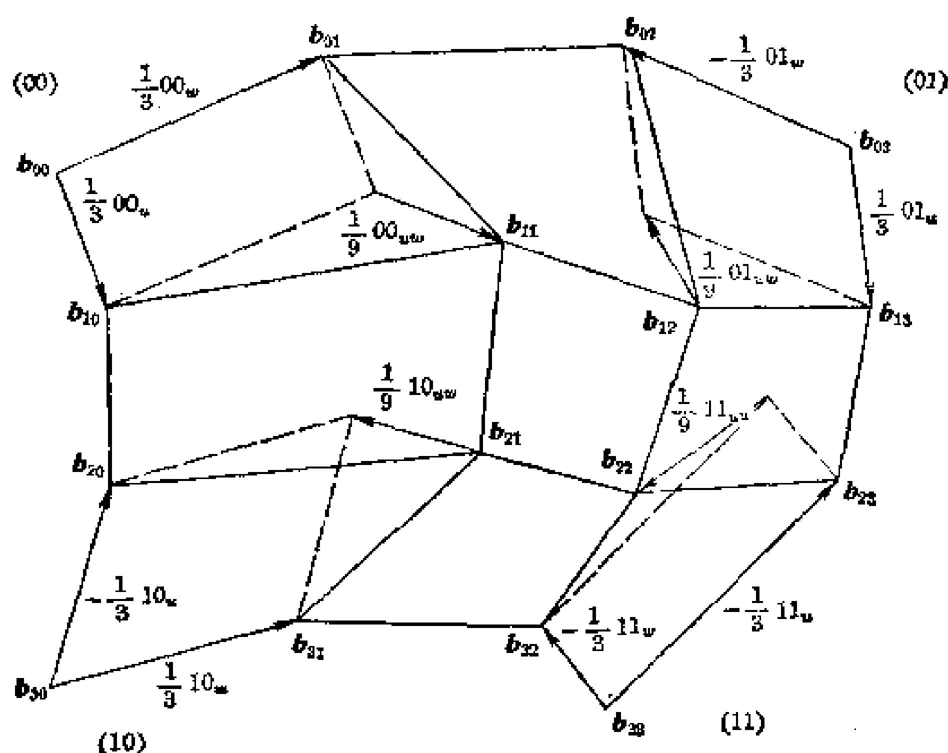


图 8

对(3.10)式右端矩阵的周围十二个元素我们还可以从曲面的边界曲线的 Bézier 性质予以直接导出. 由于曲面的四条边界曲线都是三次 Bézier 曲线, 它们的特征多边形的顶点正分布在矩阵$[\boldsymbol{b}]$的周围四边元素中. 作为三次 Bézier 曲线的端点性质的自然推论, 我们还有

$$00=\boldsymbol{b}_{00},\ 01=\boldsymbol{b}_{03},\ 10=\boldsymbol{b}_{30},\ 11=\boldsymbol{b}_{33};$$

$$\frac{1}{3}00_w=\overrightarrow{b_{00}b_{01}},\quad -\frac{1}{3}01_w=\overrightarrow{b_{03}b_{02}},\ \cdots\cdots,$$

等等关系．这些关系却正好反映在(3.10)的周围四边元素当中．

因此，$[\boldsymbol{b}]$的四角元素分别和Coons曲面的四个角点等同；$[\boldsymbol{b}]$的周围四边上其余八个元素则分别对应于Coons曲面中的八个角点切向量．

从(3.10)式右端矩阵的中心四个元素容易看出：以$\overrightarrow{b_{00}b_{01}}$和$\overrightarrow{b_{00}b_{10}}$为邻边作平行四边形时，$\boldsymbol{b}_{00}$的对角顶点到$\boldsymbol{b}_{11}$所作的向量，恰巧等于$\frac{1}{9}00_{uw}$．在其余三个角点处也有相类似的关系，只是向量指向的规则不尽相同．这些关系都已清楚地标明在图8中．

因此，我们看到了这样一件有趣的事实：双三次Coons曲面的四个角点扭矢，明显地同双三次Bézier曲面的特征网格的中央四个顶点$\boldsymbol{b}_{11}$，$\boldsymbol{b}_{12}$，$\boldsymbol{b}_{21}$，$\boldsymbol{b}_{22}$有着密切的关系．一旦给定了双三次Bézier曲面的四条边界，调整顶点$\boldsymbol{b}_{11}$，$\boldsymbol{b}_{12}$，$\boldsymbol{b}_{21}$，$\boldsymbol{b}_{22}$的位置，也就等价于变动角点信息矩阵的四个扭矢．这样，我们便把Coons的角点扭矢的几何意义搞清楚了(Sadeghi & Gould, 1974)．

必须指出，我们将双三次参数曲面表示成Bézier式样或者Coons式样，尽管是等价的，但是采用Bézier式样或许更好一些．其理由是这样：根据Bézier曲面对于它的特征网格的逼近性质看来，给定了网格顶点矩阵$[\boldsymbol{b}]$，曲面大体上就有了一个概括的形状．通过对$[\boldsymbol{b}]$中诸元的调整，就能实现对于曲面形状的控制．

然而，我们对于利用特征网格$[\boldsymbol{b}]$来控制曲面形状的细节并没有了解得很清楚．在三次Bézier曲线的场合，用特征多边形控制曲线形状这件事情是已经解决的了．然而到了参数曲面的领域，问题要困难得多．比方说，假如特征网格组成一个凸的多面形，对应的双三次Bézier曲面也是凸的吗？回答或许是肯定的，但是我们还没有证明．这个问题无论在理论上或者实用上都是很

有价值的．如果能够解决它，设计凸的 Coons 曲面片就成为简单的事情了．然而目前在航空工艺部门的做法，只有通过检查曲面上一批点处的 Gauss 曲率符号，来估计曲面是否为凸．一旦出现了鞍点，就要调整角点信息矩阵，特别是扭矢，用以消除鞍点．因为缺乏理论保证，调整的方法尚局限于经验性的阶段．

§4　*B* 样条曲面

从 B 样条曲线到 B 样条曲面的拓广完全类似 Bézier 曲线到 Bézier 曲面的拓广，前者也可看成两个不同方向的 B 样条曲线的直积．

定义　给定 $(m+1)(n+1)$ 个空间点列 $\boldsymbol{b}_{ij}$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\cdots,\ m)$，称 $m\times n$ 次参数曲面

$$\boldsymbol{P}(u,\ w)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}F_{i,n}(u)F_{j,m}(w)\boldsymbol{b}_{ij},\ 0\leqslant u,\ w\leqslant 1 \qquad (4.1)$$

为 $m\times n$ 次 **B 样条曲面片**，式中 $\{F_{i,n}(u)\}$ 为 n 次 B 样条基函数族．由 $\boldsymbol{b}_{ij}(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\cdots,\ m)$ 组成的空间网格称为 **B 特征网格**．

(1) 当 $m=n=1$ 时，我们象双一次 Bézier 曲面的情况那样，得到马鞍面．

(2) 当 $m=n=2$ 时，我们有双二次曲面，它的两族参数坐标

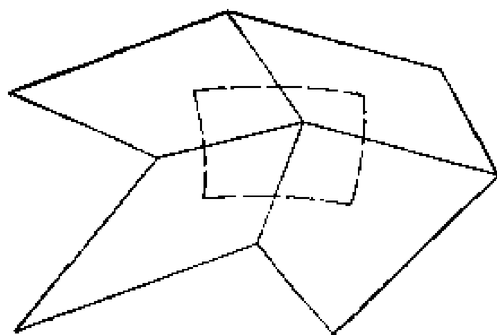


图　9

曲线都是抛物线. 图9示意了曲面同其 B 特征网格的关系. 图中，我们只画了 B 样条曲面的一片. 要是网格向外扩展，那末曲面片也相应地延伸，而且相邻两片之间达到了 C^1 连续，这是因为二次 B 样条基函数族 $\{F_{i,2}(u)\}$ 是 C^1 连续的缘故.

(3) 当 $m=n=3$ 时，对应的双三次 B 样条曲面片是最重要的一种. 图10示意了其中的一片曲面及其 B 特征网格.

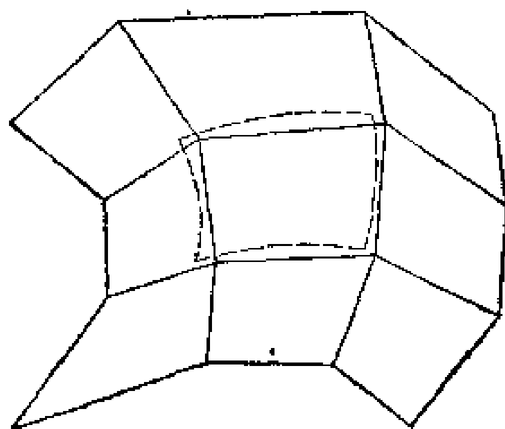


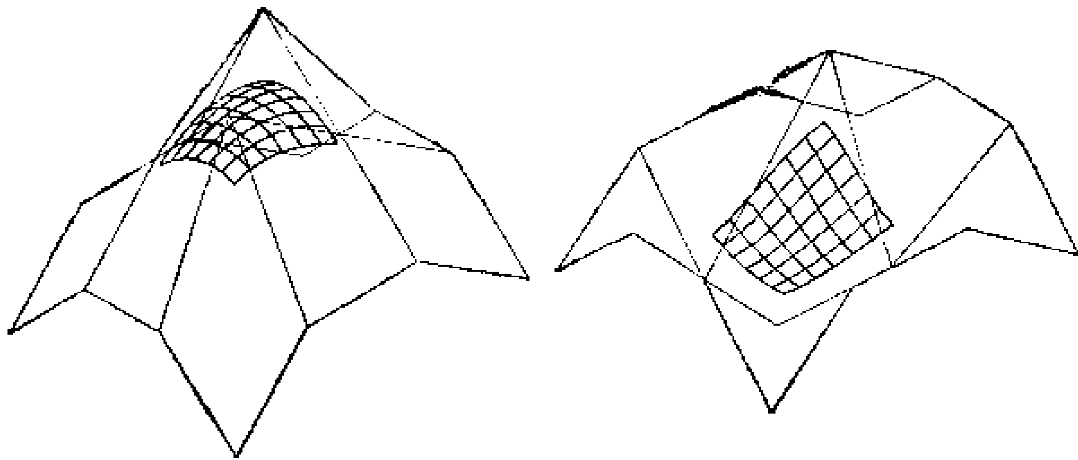
图 10

如同三次参数曲线段、三次 Bézier 曲线和三次 B 样条曲线段是互相等价的一样，双三次 Coons 曲面、双三次 Bézier 曲面和双三次 B 样条曲面片也是互相等价的，只是表达方式不同而已. 然而这并不意味着随便选用哪一种形式都是无所谓的. 上一节提到 Bézier 曲面解决了 Coons 曲面中扭矢的表示问题. 而双三次 B 样条曲面的长处则在于相当轻松地解决了曲面片之间的连接问题：每相邻两片曲面之间都理所当然地达到了 C^2 连续，这一点自然是从三次 B 样条函数族 $\{F_{i,3}(u)\}$ 的 C^2 连续得到保证的. 如果把这项措施放到 Coons 形式或者 Bézier 形式中去，做起来就非常吃力费事.

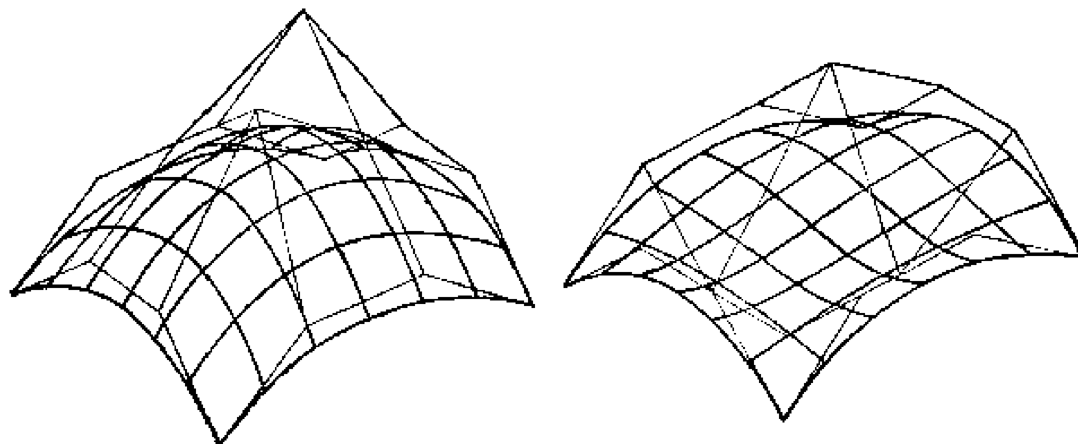
遗憾的是，由于双三次 B 样条曲面放弃了四个角点的插值条件，曲面片一般并不通过 B 特征网格的任意一个顶点. 因此，B 样条曲面特别适用于几何外形设计，这是和双三次的 Coons 曲面

和 Bézier 曲面不同之处，因为后者两曲面都保留了角点插值性质而适用于几何外形的数学放样.

附　图



双三次 B 样条曲面



双三次 Bézier 曲面

第六章　非线性样条曲线

我们在第二章介绍了几种样条函数，它们有这样两个共同点：

(1) 在给定了区间上的分割之后，每一种样条函数的全体都构成线性空间，并且连续性方程也是线性代数方程组，因而处理问题较为方便；

(2) 它们在几何外形设计的应用中，仅仅适用于小挠度的场合，就是说，这些样条函数都缺乏几何不变性.

第三章中所讨论的三次参数样条曲线则是几何不变的，它适用于大挠度的情况. 特别是，其中累加弦长三次参数样条曲线是在几何外形设计中最早应用的大挠度样条，具备计算简单、线型光顺等优点，很受实际应用部门的欢迎.

从六十年代中期开始，人们对其它的大挠度样条曲线作了种种深入研究. 特别引人注意的问题是：怎样建立大挠度木样条严格的数学模型？怎样给定样条的连接条件？怎样求解连续性方程？这个讨论延续了十几年，直到最近几年才在主要的问题上弄出一个眉目，而其中某些方面的问题仍在发展之中. 这些就是将在本章前三节几何样条、局部三次样条和力学样条中所要叙述的内容.

随着数控机床（包括数控绘图和数控火焰切割）的普遍使用，

人们希望创造一种能够直接用于数控加工的样条曲线. 鉴于目前多数的数控机床配备有圆弧和直线的插补装置这一事实, 如果我们能构造一类由圆弧拼接成的样条曲线, 那末不需要后置处理, 就直接作为数控机床的输入信息来使用. 本章§4和§6中所介绍的双圆弧插值和圆弧样条曲线, 就是特别适用于数控加工的一类C^1连续样条曲线. 接着在§5中, 我们讨论双圆弧插值的拓广, 即二次曲线偶插值. 在配备有一般二次曲线插补装置的数控设备的地方, 要是采用双曲线偶插值, 那末在相同的精度范围内, 曲线的段数比起双圆弧插值来将要减少近一半. 从数控加工工艺的角度来看, 这显然是一件很有意义的事情.

本章所讨论的各类样条, 每一类的全体并不构成线性空间, 连续性方程也是非线性的, 因而总称为**非线性样条曲线**. 非线性就是它们的第一个特点. 所以我们对这些样条就不能象三次样条函数那样地直接使用代数中一套强有力的线性理论和逼近论中处理多项式函数的成熟方法, 而只能对个别问题作个别处理, 于是方法众多, 手段各异, 呈现一派百花齐放的景象. 第二个特点是所论的这些样条具有明显的几何意义. 从问题的提出到问题的处理, 使用的基本上是几何化的方法, 它和坐标系的选择无关, 所以更加合乎几何外形设计的要求.

§1 几何样条曲线

1.1 力学背景和定义

我们在第二章讲述三次样条函数时, 曾引进无摩擦木样条的数学模型, 在相邻两个型值点之间的负载平衡方程式是

$$\frac{d^2k}{ds^2}=0, \tag{1.1}$$

式中参数s代表木样条挠曲线的弧长, $k(s)$表示挠曲线在s处的

曲率. 木样条在型值点以外的各处都应当成立(1.1)式. 当时的处理方式是这样: 在作了小挠度假定后, 按照近似关系式 $s\approx x$, $k\approx\frac{d^2y}{dx^2}$, 我们从(1.1)自然地导出三次样条函数.

在大挠度的场合, 上述线性化的处理方法不能适用. 在相邻两个型值点之间, (1.1)式的解是

$$k=as+b, \tag{1.2}$$

其中 a 和 b 是两个积分常数. (1.2)式所代表的平面曲线, 通称 Cornu 螺线或 Euler 螺线. 图1是一条 Cornu 螺线的示意图, 它的形状很象两圈钟表发条. 其实, 钟表发条的内在方程就是(1.2)式.

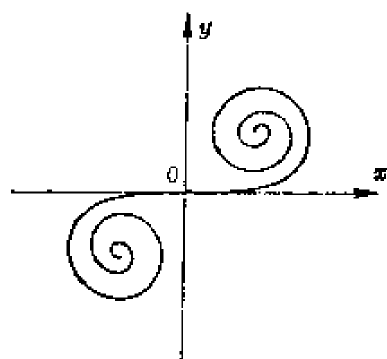


图 1

定义 在平面上给定一组型值点 $\{P_i\}$ 后, 称满足下列两个条件的插值样条为**几何样条曲线**:

(1) 在每相邻两个型值点之间是一段 Cornu 螺线.

(2) 整个样条上 C^2 连续.

我们所以给这类样条以"几何"的称呼, 是因为它们的方程仅包含曲率和弧长这些几何量, 因而不同于那些在坐标系中通过函数方程来表示的函数样条. 由于曲率和弧长都是曲线的内在几何量, 一些作者也称几何样条为内在样条(Adams[3], 1975; Pal[1], 1978).

在几何外形的数学放样工作中, 经常谈论到曲线光顺性的概念. 顾名思义, 光顺就是光滑和顺眼的意思. "光滑", 在数学上的意义比较明确, 一般需要达到 C^2 连续. "顺眼"则涉及到美学的范畴, 但是其判别标准并非不可捉摸的. 归纳起来, 满足这样两个条件的曲线就是顺眼的: (1)没有多余拐点, 即保形; (2)曲线的臌瘪变化比较均匀. 所谓臌与瘪, 就是肉眼看到的曲线上的曲率变化.

不言而喻，最均匀的变化就是线性变化. 从(1.2)式看出，Cornu螺线上至多只有一个拐点，所以满足了条件(1).

我们已经看到，木样条的数学表示是(1.2)式，这就从数学的角度论证了木样条曲线的光顺性，同实践检验的结果是完全一致的.

因为几何样条曲线非常逼真地模拟了木样条的原型，而且有着良好的光顺性质，近年来受到实际应用部门和不少理论工作者的重视. 据报导，西德造船工业采用了几何样条曲线作为船体线型设计的数学模型，并已投入实船生产 (Alft & Collatz, 1976). 英国剑桥大学的 CAD 小组的成员最近几年在 CAD 杂志上发表了一系列文章，研究怎样运用几何样条曲线来实施对于曲线的曲率控制. 比方，在给定了两端点以及两端点处的切线同曲率这六个条件后，讨论如何利用段数较少的几何样条进行插值，而且为此建立了一套系列图形和标准算法 (Pal & Nutbourne, 1977; Pal[1][2], 1978; Schechter[1][2], 1978).

1.2 连续性方程

为了建立几何样条曲线的连续性方程，首先需要的是，给出 C^2 类曲线段上的弧长参数 s、弦长参数 L 和两端切线与弦夹角 Θ_1 和 Θ_2 之间的微分关系式. 以后我们常要用到这个关系式.

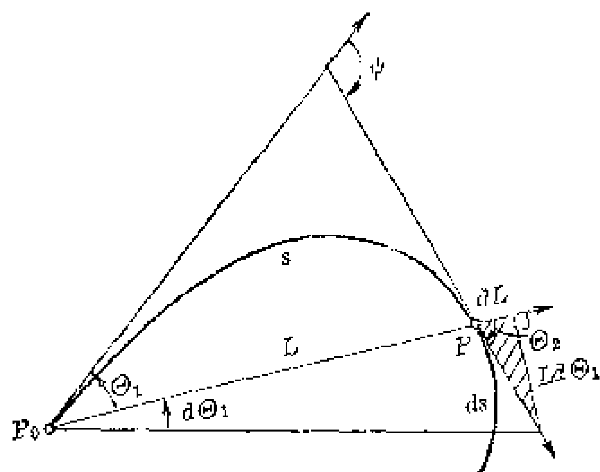


图 2

如图 2 所示，在任意一段 C^2 连续的平面曲线上，设定点 P_0 对应于 $s=0$，动点 P 则对应于弧长参数 s. 记有向弦长 $L=\overline{P_0P}$. 曲线在 P_0和 P 处的正向切线间有向

弦线 L 所夹的有向角分别记作 Θ_1 和 Θ_2，这两条切线之间的夹角 $\Psi=\Theta_2-\Theta_1$. 我们让点 P 在曲线上移动 ds 距离，产生了图 2 中用斜线标明的一个直角微分三角形，它的三条边长在忽略了高阶项之后是 ds, dL, $Ld\Theta_1$. 由于曲线在 P 点的曲率 $k=\frac{d\Psi}{ds}$，我们获得函数 L, Θ_1, Θ_2 关于变元 s 的微分方程组如下：

$$\begin{cases}\frac{dL}{ds}=\cos\Theta_2,\\ \frac{d\Theta_1}{ds}=-\frac{\sin\Theta_2}{L},\\ \frac{d\Theta_2}{ds}=k-\frac{\sin\Theta_2}{L},\end{cases}\tag{1.3}$$

初值应当是

$$L(0)=0,\ \Theta_2(0)=\Theta_1(0)=0.\tag{1.4}$$

对于非线性的方程组 (1.3)，我们可以用幂级数展开求解. 按照初值条件(1.4)，便有

$$L(0)=0,\ \left.\frac{dL}{ds}\right|_0=\cos\Theta_2|_0=1,$$

$$\left.\frac{d^2L}{ds^2}\right|_0=-\frac{d\Theta_2}{ds}\sin\Theta_2|_0=0,$$

因此得到 L 关于 s 的展开式

$$L=s+O(s^3).\tag{1.5}$$

当所论的曲线是 Cornu 螺线 (1.2) 时，我们将 Θ_1 和 Θ_2 关于 s 展开：

$$\begin{cases}\Theta_1=A_1s+\frac{1}{2}B_1s^2+O(s^3),\\ \Theta_2=A_2s+\frac{1}{2}B_2s^2+O(s^3)\end{cases}\tag{1.6}$$

代到方程组(1.3)中的第二、三式，并利用(1.5)，我们便求得

$$A_1=-\frac{b}{2},\ B_1=-\frac{a}{3};\ A_2=\frac{b}{2},\ B_2=\frac{2a}{3}.\tag{1.7}$$

假定 Cornu 螺线段的两端点为 P_1 和 P_2，对应的弧长参数分别是 0 和 s_0. 弦长 $L_0=\overline{P_1P_2}$. 两端点处的切线同弦所夹的有向角在图 3 中记为 θ_1 和 θ_2，则有 $\theta_1=\Theta_1(s_0)$，$\theta_2=\Theta_2(s_0)$. 记曲线段在两端点处的曲率为 k_1 和 k_2，那末 (1.2) 中的两个积分常数应是

$$a=\frac{k_2-k_1}{s_0},\quad b=k_1.$$

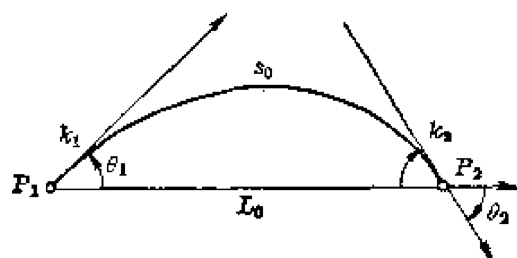


图 3

在 (1.6) 中取 $s=s_0$，利用 (1.7) 和 (1.5) 式，便求得 Cornu 螺线在两个端点 P_1, P_2 处的切线角 θ_1, θ_2 同曲率 k_1、k_2、弦长 L_0 之间的关系式

$$\begin{cases}\theta_1=-\dfrac{L_0}{6}(2k_1+k_2)+O(L_0^3),\\[2ex]\theta_2=\dfrac{L_0}{6}(k_1+2k_2)+O(L_0^3).\end{cases}\tag{1.8}$$

我们现在已经不难在关系式 (1.8) 的基础上导得几何样条曲线的连接条件.

实际上，设已经给定平面上 $n+1$ 个型值点 $P_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$. 相邻两段弦向量 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ 和 $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ 所夹的有向角 $\varphi_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 称为弦转角. 图 4 示意了第 i 段同第 $i+1$ 段 Cornu 螺线在型值点 P_i 处相连接的情况. 因为它们达到 C^2 连续，记两段曲线在 P_i 处的公共曲率为 k_i，记公共切线 T_i 同左右两弦线所夹的有向角分别为 $\theta_2^{(i)}$ 和 $\theta_1^{(i+1)}$. 按照添上指标 i 以后的 (1.8) 式，这两个夹角将表示成

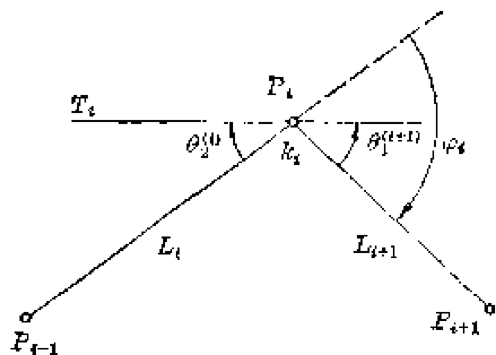


图 4

$$\begin{cases} \theta_1^{(i+1)} = -\dfrac{L_{i+1}}{6}(2k_i+k_{i+1})+O(L_{i+1}^3), \\ \theta_2^{(i)} = \dfrac{L_i}{6}(k_{i-1}+2k_i)+O(L_i^3). \end{cases} \tag{1.9}$$

它们与弦转角 φ_i 之间存在切线连续关系式

$$\theta_2^{(i)}-\theta_1^{(i+1)}=\varphi_i, \tag{1.10}$$

因而

$$\mu_i k_{i-1}+2k_i+\lambda_i k_{i+1}=3K_i+O(\varphi^2) \tag{1.11}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

式中 $\lambda_i=\dfrac{L_{i+1}}{L_i+L_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{L_i}{L_i+L_{i+1}}$; 过 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 三点的圆率是 $K_i=\dfrac{2\sin\varphi_i}{\overline{P_{i-1}P_{i+1}}}=\dfrac{2\varphi_i}{L_i+L_{i+1}}+O(\varphi_i^2)$; $\varphi=\max\limits_i|\varphi_i|$. (1.11)式称为几何样条曲线的 **$k$ 连续性方程**. 它的主要部分与累加弦长三次参数样条曲线的 k 连续性方程形式完全相同，两者的差别仅在 $O(\varphi^2)$ 项中(刘鼎元[1], 1978).

在局部小挠度场合，(1.11)和(1.9)中的高阶项可以省略掉. 通过省略掉高阶项之后的(1.11)和$(1.9)_1$式，在附加适当的边界条件 k_0 和 k_n 后，我们按照普通的追赶法容易求得几何样条曲线在每点 P_i 处的曲率 k_i 和切线 T_i. 但是，每一段 Cornu 螺线的位置如何决定，便成为下一段讨论的内容.

1.3 插值公式

单靠内在方程 (1.2) 是不能决定曲线位置的. 我们必须在坐标系中把几何样条曲线的插值公式表示出来. 最自然的办法是采用如图 5 所示的局部直角坐标系$\{P_1; x, y\}$，也即：取 P_1 为坐标原点，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 为 x 轴，y 轴则由右手法则决定. 为了符号的简洁，我们再次省略指标 i，而用 P_1, P_2 代表相邻两个型值点. 曲线在 P_1 点的切线角 θ_1 是按照连续性方程(1.11)以及 (1.9) 式解出的，

曲线上对应于弧长参数 s 的点 P 的切线角 $\theta(s)$ 则是通过对曲率的积分来求得:

$$\theta(s)=\int_0^s k(s)ds+\theta_1=\frac{1}{2}as^2+bs+\theta_1. \quad (1.12)$$

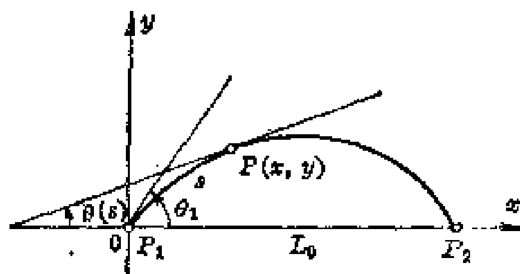


图 5

这样, P_1 和 P_2 之间的一段 Cornu 螺线在局部直角坐标系中被表示为关于弧长 s 的参数方程

$$\begin{cases} x=\int_0^s \cos\theta(\tau)d\tau, \\ y=\int_0^s \sin\theta(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (1.13)$$

(1.13)就是几何样条曲线的插值公式, 其右端是两个 Frenet 积分, 我们虽然不能把它们表示成初等函数, 却可以通过标准计算程序进行数值积分. 这样做, 当然会给插值计算带来麻烦, 然而在局部小挠度场合, 不妨取 (1.13) 的一阶近似, 即展开积分号中的

$$\cos\theta=1+O(\theta^2), \quad \sin\theta=\theta+O(\theta^3).$$

于是, 插值公式(1.13)变成

$$\begin{cases} x=s+O(\varphi^3), \\ y=\frac{1}{6}as^3+\frac{1}{2}bs^2+\theta_1 s+O(\varphi^4). \end{cases}$$

当忽略了其中的高阶项之后, 几何样条曲线在各个局部直角坐标系中的近似表示式就是三次多项式函数

$$y=\frac{1}{6}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+\theta_1 x.$$

从此我们得到一个启发: 假定直接从局部直角坐标系中的三次多项式出发构造 C^2 连续的插值样条曲线, 会不会兼备计算简单

和线型光顺这两方面的优点呢？这就是局部三次样条曲线的构造背景。

§2 局部三次样条曲线

2.1 定义和连续性方程

在平面上给定一组型值点 $P_i(i=0, 1, \cdots, n)$后，过每相邻两个型值点 P_{i-1} 和 P_i 建立一个局部直角坐标系．在这个坐标系中，以 P_{i-1} 和 P_i 为两端点的三次多项式曲线称为局部三次曲线．较早利用这类曲线构造样条的是 Fowler & Wilson (1963) 及研野和人(1971)，所用方法是基于迭代逼近技巧．之后，孙家昶(1977)建立了连续性方程并作线性化处理，从而给出了逼近阶估计和变分性质的讨论．

定义 凡是满足下列两个条件的插值样条称为**局部三次样条曲线**:

(1) 在每个局部直角坐标系中是一段局部三次曲线;

(2) 整条曲线 C^2 连续．

我们仍然省略指标 i 而用 P_1 和 P_2 代表相邻的两个型值点，记弦长 $L=\overline{P_1P_2}$．在局部直角坐标系中，局部三次曲线的方程是

$$y=ax^3+bx^2+cx. \tag{2.1}$$

它以 $P_1(0, 0)$ 和 $P_2(L, 0)$ 为两端点，因此有

$$c=-aL^2-bL. \tag{2.2}$$

曲线在 P_1 和 P_2 处的一阶和二阶导数分别记为 y_1', y_2' 和 y_1'', y_2''. 从(2.1)和(2.2)便导得它们之间应当满足的关系式

$$\begin{cases} y_1'=-\dfrac{L}{6}(2y_1''+y_2''), \\ y_2'=\dfrac{L}{6}(y_1''+2y_2''). \end{cases} \tag{2.3}$$

设曲线在 P_1 和 P_2 处的切线同弦 P_1P_2 所夹的有向角为 θ_1 和 θ_2，曲率为 k_1 和 k_2（见图 6）．于是(2.3)可以改写成关于夹角 θ_1，θ_2 和曲率 k_1，k_2 以及弦长 L 这些几何量之间的关系式

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = -\dfrac{L}{6}\left(\dfrac{2}{\cos^3\theta_1}k_1 + \dfrac{1}{\cos^3\theta_2}k_2\right), \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{L}{6}\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_1}k_1 + \dfrac{2}{\cos^3\theta_2}k_2\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

两边关于 θ_1 和 θ_2 幂级数展开，则有

$$\begin{cases} \theta_1 = -\dfrac{L}{6}(2k_1 + k_2) + O(\theta^3), \\ \theta_2 = \dfrac{L}{6}(k_1 + 2k_2) + O(\theta^3). \end{cases} \tag{2.5}$$

式中 $\theta = \max(|\theta_1|, |\theta_2|)$．重新添上指标 i，便得到

$$\begin{cases} \theta_1^{(i+1)} = -\dfrac{L_{i+1}}{6}(2k_i + k_{i+1}) + O(\varphi^3), \\ \theta_2^{(i)} = \dfrac{L_i}{6}(k_{i-1} + 2k_i) + O(\varphi^3), \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $\theta_1^{(i+1)}$ 和 $\theta_2^{(i)}$ 代表相邻的两段局部三次曲线在 P_i 处的公切线与各自弦线之间所夹的有向角（图 7），k_i 代表相邻的两段局部三次曲线在 P_i 处的共同的曲率，φ_i 表示弦转角．现在，我们把(2.6)式代入切线连续关系式

$$\theta_2^{(i)} - \theta_1^{(i+1)} = \varphi_i, \tag{2.7}$$

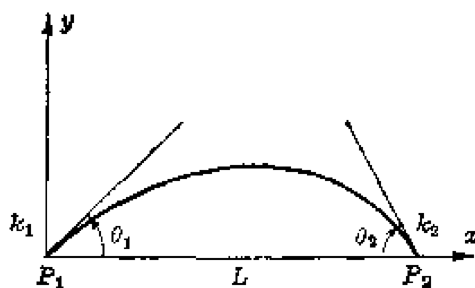


图 6

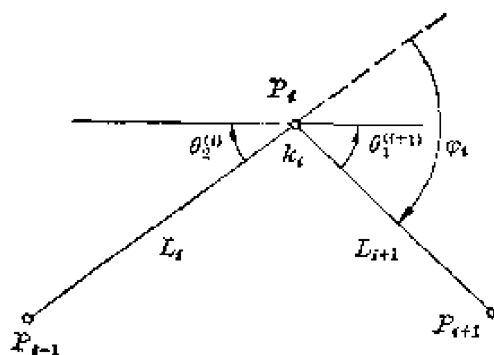


图 7

便得出局部三次样条曲线的 $\boldsymbol{k}$ 连续性方程：

$$\mu_i k_{i-1}+2k_i+\lambda_i k_{i+1}=3K_i+O(\varphi^2)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{2.8}$$

式中，各记号的含义和(1.11)式相同．如果对照(1.11)和(2.8)，就会明了：几何样条和局部三次样条的 k 连续性方程除了高阶项 $O(\varphi^2)$ 以外，是完全一致的．

相应地，局部三次样条的 $\boldsymbol{\theta}$ 连续性方程是

$$\lambda_i\theta_{i-1}+2\theta_i+\mu_i\theta_{i+1}=-2\lambda_i\varphi_i-\mu_i\varphi_{i+1}+O(\varphi^3)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{2.9}$$

式中记 $\theta_i\equiv\theta_1^{(i+1)}$．

关于局部三次样条的收敛性问题，已经有了这样的逼近阶估计定理，我们无证明地叙述如下．

定理 设 Γ 是任意一条插值于给定型值点 $P_i(i=0,\ 1,\cdots,n)$ 的 C^4 连续曲线．如果局部三次样条曲线 S 与 Γ 有着相同的插值条件和边界条件，则在每个局部直角坐标系中 S 关于 Γ 的逼近阶为

$$S^{(\alpha)}(x)-\Gamma^{(\alpha)}(x)=O(\varphi^{4-\alpha})\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2).$$

2.2 线性化的局部三次样条曲线

在几何外形计算中，经常出现的是局部小挠度型值点列．当我们使用局部三次样条进行插值时，还可以作进一步简化．办法是省略掉各算式中的高阶项，使非线性问题转化成线性问题．也就是说，将整体的大挠度曲线段分割成若干个局部的小挠度曲线段．具体的算法如下：

第一步，求 $k_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$．

将(2.8)式中的高阶项 $O(\varphi^2)$ 省略掉，便得到线性化的连续性方程：

$$\mu_i k_{i-1}+2k_i+\lambda_i k_{i+1}=3K_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1). \tag{2.10}$$

在附加两个适当的边界条件后，用普通的追赶法求得唯一解 k_i

$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$.

第二步，求切线角 $\theta_1^{(i)}$ 和 $\theta_2^{(i)}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

将第一步求得的 $k_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 代入省略掉高阶项 $O(\varphi^3)$ 后的 $(2.6)_1$，我们便求得 P_i 处的切线角

$$\theta_1^{(i+1)}=-\frac{L_{i+1}}{6}(2k_i+k_{i+1}). \tag{2.11}$$

然后从(2.7)求得另一个切线角

$$\theta_2^{(i)}=\varphi_i+\theta_1^{(i+1)}. \tag{2.12}$$

第三步，给出每个局部直角坐标系中的插值表示式.

为简单计，我们省略去指标 i，并参照图 6 和(2.1)式. 式中各系数 $a,\ b,\ c$ 应当满足下列关系式

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\theta_1=c,\\ \operatorname{tg}\theta_2=3aL^2+2bL+c,\\ 0=aL^2+bL+c.\end{cases}$$

从此解得

$$a=\frac{\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2}{L^2},\quad b=-\frac{2\operatorname{tg}\theta_1+\operatorname{tg}\theta_2}{L},\quad c=\operatorname{tg}\theta_1. \tag{2.13}$$

式中的切线角 θ_1 和 θ_2 已经由(2.11)和(2.12)决定了.

按照(2.10)，(2.11)，(2.12)，(2.13)以及(2.1)式所求得的插值样条，称为**线性化的局部三次样条曲线**. 它在各型值点处严格达到 C^1 连续，近似达到 C^2 连续. 事实上，C^1 连续是由(2.12)保证的. 此外，不难看出，线性化样条在每个型值点处的左右曲率同精确值之差都是 $O(\varphi^2)$，所以在工程的精度内，实际上不会发生曲率跳跃的感觉. 我们容易证明，线性化样条与局部三次样条有相同的逼近阶.

我们认为，在实际应用到局部小挠度型值点的插值时，使用线性化的局部三次样条，优点是计算简单，线型光顺. 这样，既可避免本来需要通过迭代技巧才能求出(2.8)式的精确解的这种麻烦，又能逼真地再现木样条所攀的曲线. 假定把几何样条作为木

样条的标准数学模型来看待，那末通过(1.11)同(2.8)式的比较，我们看出，局部三次样条与几何样条在型值点处的曲率本来就有$O(\varphi^2)$的误差．现在虽经过了线性化，但也还是$O(\varphi^2)$的误差．

在船体生产数控系统上，沪东造船厂多年来采用了线性化的局部三次样条作为插值曲线．生产实践证明，上述的看法确实是合乎实际的(刘鼎元、苏文荣[1]，1980)．

如果对线性化的局部三次样条与累加弦长三次参数样条这两者的k连续性方程作对比，我们立即发现它们的主部完全相同，差别也仅仅限于高阶项$O(\varphi^2)$，因而有着同样的逼近阶．我们在沪东造船厂曾经做过对比试验．在插值同一组局部小挠度型值点时，这两种曲线几乎完全重迭在一起．而在局部大挠度的型值点附近，两者果然有所不同，但也难辨别它们的优劣．

总之，理论分析和实际试验都表明，累加弦长三次参数样条同线性化的局部三次样条，是较为实用的两种大挠度插值样条，它们的共同优点，也是计算简单和线型光顺等．

§3 力学样条曲线

3.1 定 义

无摩擦木样条的另一种数学模型，则是人们从能量极小原理出发而把它建立起来的．我们知道，省略掉木样条的刚度平方$(EI)^2$这个常数因子不计，

$$U=\int_0^{s_0}k^2ds \tag{3.1}$$

代表了相邻两块压铁之间长度为s_0的一段木样条的能量．凡使得$U=\min$的曲线，就是无摩擦木样条的平衡位置．凡使U的一次变分为零，即

$$\delta U=0 \tag{3.2}$$

的曲线,称为 M 曲线,我们记它为

$$M: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s), \quad s \text{ 是曲线的弧长参数.} \tag{3.3}$$

定义 在给定了一组型值点时,若每相邻两个型值点之间都是一条 M 曲线,而且在各连接处达到 C^2 连续,就称这种插值样条为**力学样条曲线**.

对这一类样条曲线的性质,尤其是 M 曲线的性质,许多作者曾经运用不同的工具进行了研究,还成功地应用到工程的领域中去(MacLaren, 1958; Birkhoff, Burchard & Thomas, 1965; Glass, 1966; Larkin, 1966; Lee & Forsythe, 1973; Malcolm, 1977). 其中最著名的当推挪威造船业的 AUTOKON 几何外形设计系统. 这个系统关于曲线插值的数学方法是以 Mehlum([1] 1969, [2]1974)所研究的力学样条曲线的理论和算法为基础的. 他的一套算法程序称为 KURGLA, 就是挪威文 Kurve Glatting(曲线拟合)的缩写. AUTOKON 在 1965~1969 年期间已经光顺了 150 条船,这个几何外形设计系统在国际上是颇有名气的.

Mehlum 对于 M 曲线的研究与众不同地采用了典型的微分几何方法,很有一些特色. 由于问题是非线性的,假如要全面地进行论述,就离不开迭代逼近、幂级数展开等一套数值计算方法. 但是我们不打算过多地牵涉到这方面的内容,而只局限于力学样条的基本数学理论. 有兴趣于数值计算的读者,可以参阅附在书末的有关文献.

3.2 空间 M 曲线

设由(3.3)表示的空间 M 曲线在点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的切向量、主法向量、从法向量依次记成 $\boldsymbol{T}(s)$, $\boldsymbol{N}(s)$, $\boldsymbol{B}(s)$, 它们合在一起组成曲线 M 的 Frenet 标架,其间成立下列一些基本关系式

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}, \tag{3.4}$$

以及 Frenet 公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}' = k\boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{N}' = -k\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{B}' = -\tau\boldsymbol{N}, \end{cases} \tag{3.5}$$

式中 k 和 τ 表示曲线 M 的曲率和挠率，而撇号则代表对弧长 s 求导. 现在用

$$k^2 = (\boldsymbol{T}')^2$$

代入能量积分(3.1)，并且注意到

$$\boldsymbol{T}^2 = 1 \tag{3.6}$$

和

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{T}. \tag{3.7}$$

我们就可把(3.2)看成为带有两个约束条件(3.6)和(3.7)的变分问题. 从向量形式的 Lagrange 乘子法得出

$$\delta\int_0^{s_0} F(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{T}';\ \boldsymbol{r}';\ s)ds = 0, \tag{3.8}$$

式中函数

$$F \equiv (\boldsymbol{T}')^2 + \lambda(s)(\boldsymbol{T}^2 - 1) + 2\boldsymbol{\Psi}(s)(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{T}).$$

按照(3.8)的欧拉方程，导得

$$\begin{cases} -\boldsymbol{T}'' + \lambda\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Psi}, \\ \boldsymbol{\Psi}' = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

也就是

$$(\lambda + k^2)\boldsymbol{T} - k'\boldsymbol{N} - k\tau\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Psi}, \tag{3.10}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 为常向量. 上式两边对 s 求导并利用(3.5)，我们得到

$$\lambda = D - \frac{3}{2}k^2, \tag{3.11}$$

$$k^2\tau = C, \tag{3.12}$$

这里 C 和 D 是两个积分常数. 若将(3.10)式两边各自平方，便得

$$k'^2 + \left(\frac{1}{2}k^2 - D\right)^2 + \frac{C^2}{k^2} = J^2, \tag{3.13}$$

式中常数 $J = |\boldsymbol{\Psi}|$. 这是一个关于 k 的一阶非线性常微分方程.

为了把它的解用特殊函数表示出来，我们作新函数

$$\eta=\frac{1}{3}D-\frac{1}{4}k^2. \tag{3.14}$$

于是得到与(3.13)等价的关于 η 的常微分方程

$$\eta'^2=4\eta^3-g_2\eta-g_3, \tag{3.15}$$

式中常数

$$g_2=\frac{1}{3}D^2+J^2,\quad g_3=\frac{1}{27}D^3-\frac{1}{3}DJ^2+\frac{1}{4}C^2.$$

如所知，(3.15)的解是 Weierstrass 椭圆 p 函数

$$\eta=p(s+A;\ g_2,\ g_3),$$

其中 A 是积分常数. 因而方程(3.13)的解是

$$k^2=\frac{4}{3}D-4p(s+A;\ g_2, g_3). \tag{3.16}$$

几何关系式(3.12)和(3.16)一起决定了 M 曲线的曲率和挠率，从而完全决定了 M 曲线的形状. 式中的 C, D, J, A 则是四个积分常数.

3.3 平面 M 曲线

现在，我们把空间 M 曲线限制在平面上讨论，这时 $\tau=0$，从而(3.12)中的 $C=0$. 代入(3.13)，我们得到平面 M 曲线的曲率 k 所满足的方程：

$$k'^2+\left(\frac{1}{2}k^2-D\right)^2=J^2, \tag{3.17}$$

它的解也是由(3.16)式给出，只是常数 g_3 中的 C 取成零. 鉴于椭圆 p 函数的复杂性，我们的理论分析也就到此为止. 下面只就几种特殊情形进行讨论.

将(3.17)两边对 s 求导，便有

$$k''+k\left(\frac{1}{2}k^2-D\right)=0. \tag{3.18}$$

(1) 当 D 相当大，即 $\frac{1}{2}k^2 \ll D$ 时，(3.18)式简化成

$$k'' - Dk = 0. \tag{3.19}$$

方程(3.19)的解是双曲函数，在小挠度场合它所对应的将是张力样条函数，$\sqrt{D}$ 表示张力参数. 这一点已经在第二章中作了讨论. 在本章的§7还要继续讨论(3.19)在大挠度场合的样条构造.

(2) 当 $D=0$ 时，(3.18)式成为

$$k'' + \frac{1}{2}k^3 = 0. \tag{3.20}$$

方程(3.20)最早由 Birkhoff 和 deBoor 所导出，并发表于1965年. 但是他们的数学模型稍为有些不同. 设 A 和 B 是间隔 L_0 的两个相邻型值点，称

$$U^* = \int_A^B k^2 ds \tag{3.21}$$

为 A, B 之间一段木样条的能量，而这段曲线的弧长 s 却是变数. 凡是使得

$$\delta U^* = 0 \tag{3.22}$$

的平面曲线称为 M^* 曲线.

按(1.3)式改写(3.21)：

$$U^* = \int_A^B k^2 ds = \int_0^{L_0} \frac{k^2}{\cos\Theta_2} dL = \int_0^{L_0} F(\Theta_2', \Theta_2, L) dL,$$

式中 $$F \equiv \left(\frac{\operatorname{tg}\Theta_2}{L} + \frac{d\Theta_2}{dL}\right)^2 \cos\Theta_2.$$

(3.22)的 Euler 方程是

$$2\frac{d^2\Theta_2}{dL^2} - \left(\frac{d\Theta_2}{dL}\right)^2 \operatorname{tg}\Theta_2 - \frac{\operatorname{tg}\Theta_2}{L^2}(3+\sec^2\Theta_2) = 0.$$

再按(1.3)式改写，便有

$$\frac{d^2\Theta_2}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\Theta_2}{ds}\right)^2 \operatorname{tg}\Theta_2 - \frac{\sin\Theta_2\cos\Theta_2}{2L^2}(3+\sec^2\Theta_2) = 0. \tag{3.23}$$

又一次按(1.3),

$$\frac{dk}{ds}=\frac{k}{L\cos\Theta_2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\Theta_2 k^2. \tag{3.24}$$

两边对 s 求导的结果便是(3.20).

由此可见, Birkhoff 和 deBoor 所研究的木样条数学模型,是Mehlum 的特殊情形, 后者更包括了张力样条. 张力参数 D 与曲线段的总弧长 s_0 有关. 可以想象, 当 $s_0\to L_0$, 也就是把曲线段拉紧到逼近于弦时,我们一定有 $D\to+\infty$.

顺便说明一下,这一章所介绍的各种样条还在发展之中,名称众多, 很不统一. 我们所用的"非线性样条" (Nonlinear Splines)和"力学样条"(Mechanical Splines) 的称呼则起源于 Birkhoff 和 deBoor 1965 年发表的文章. 但是 Mehlum 以及 E. Lee 和 G. Forsythe 等却称本节讨论的对象为"非线性样条", 这样提, 未免过于宽广了.

3.4 平面力学样条的连续性方程

本节, 我们仅仅讨论由 M^* 曲线 (3.20) 构造的力学样条的连接条件. 至于(3.19)所表示的张力样条曲线,将在§7中介绍.

非线性方程(3.20)的首次积分是

$$\left(\frac{dk}{ds}\right)^2=\frac{1}{4}(c_1^4-k^4).$$

再积分一次将出现椭圆函数. 因此, 我们宁可改用幂级数展开方法,从(3.20)中解得

$$k=k_1+\frac{k_2-k_1}{s_0}s-\frac{1}{4}k_1^3 s(s-s_0)+O(s_0^3).$$

同几何样条一节中的讨论完全类似,按照(1.3)式导得的力学样条连续性方程也是(1.11)式,差异仅在高阶项 $O(\varphi^2)$ 中出现.

迄今为止, 我们已经看到: 累加弦长三次参数样条、规范样条、几何样条、局部三次样条、力学样条等除了高阶项 $O(\varphi^2)$外, 连

续性方程都是相同的(刘鼎元[1],1978). 进一步值得做的工作是更细致地分析余项 $O(\varphi^2)$, 以观察这些不同种类的样条在高阶项中的差别究竟有多大,从而更精确地估计这些插值样条(具有相同的插值条件)之间的误差.

然而 Mehlum 在 KURGLA 算法中并不使用上述幂级数展开的处理方法, 而采用了多段圆弧按照 C^1 连续方式连接起来, 然后按照一套设计好的迭代逼近技巧, 使圆弧样条逼近地满足插值条件. 现在详述于下.

第一步,我们在$(3.9)_1$式两边叉乘 $\boldsymbol{T}$, 再对 s 积分,便有

$$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{r}-\boldsymbol{E}, \tag{3.25}$$

$\boldsymbol{E}$ 是积分常向量. 在上式两边点乘 $\boldsymbol{B}$, 则得到

$$k=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{r}+e, \tag{3.26}$$

这里记常向量 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\Psi}$, 常数 $e=\boldsymbol{BE}=\pm|\boldsymbol{E}|$. 又从(3.10)看出,平面 M 曲线的 $\boldsymbol{\Psi}$ 落在曲线所在的平面上, 因而 $\boldsymbol{\Phi}$ 亦然,并且从 $\boldsymbol{\Psi}$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 就得到 $\boldsymbol{\Phi}$ 方向. 假使在平面上取定一个直角坐标系,使得常向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 x 轴的正向,那末(3.26)的坐标形式就是

$$k=Jx+e, \tag{3.27}$$

这表明平面 M 曲线的曲率沿着所在平面的某固定方向 $\boldsymbol{\Phi}$ 线性地变化. $\boldsymbol{\Phi}$ 方向的确定则依赖于总弧长 s_0 的选择, 这里存在一个自由度. 因此不妨规定 $\boldsymbol{\Phi}$ 合同于弦线 $\overrightarrow{AB}$ 方向 (A 和 B 是 M 曲线的两个端点). 据称,这样一种选择是从算法的大量实际经验中提炼出来的.

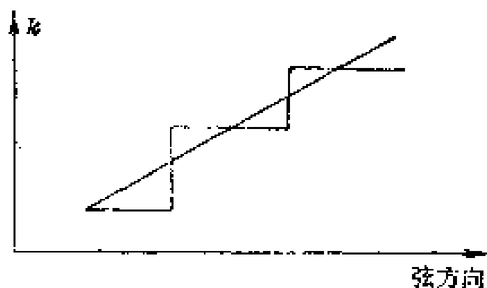


图 8

第二步则用阶梯曲率函数去逼近线性曲率(3.27). 这一步骤示意在图 8 中. 阶梯曲率逼近意味着采用一系列圆弧来逼近 M 曲线. 为着这个目的,专门设计了

一套迭代逼近技巧，最终的目标是为了获得一条由多段圆弧组成的 C^1 连续样条，并且逼近地通过已知型值点。为节省篇幅，关于迭代逼近的细节这里不再介绍。

读者如果有机会读到 KURGLA 算法的圆弧逼近部分(Mehlum [1]，1969)，或许会获得这样一种印象：圆弧的迭代逼近与前半部分关于 M 曲线的长篇论述似乎没有什么关系。这种印象不是没有道理的。原因在于Mehlum并没有进行关于 M 曲线连接条件的讨论，因此在每个型值点 P_i 处的曲率 k_i 仍然是未知数。而在第二部分设计的圆弧迭代逼近程序，实际上只是构造了一条 C^1 连续的圆弧样条。那末，我们为什么不能直接构造呢？这就是 §4 和 §6 接着所要讨论的问题。

§4 双圆弧插值

由多段圆弧拼接成的样条，虽然在连接处只能达到 C^1 连续性，但是用它却能够省略一步“后置处理”而直接作为数控设备的输入信息。因此许多实际部门都喜欢应用这种样条。

4.1 双圆弧插值的定义及连接点轨迹

当我们按照局部三次样条(或其它合适的样条)对平面上一组型值点 $\{P_i\}$ 进行插值时，往往希望再在数控绘图机上画出曲线来。然而一般的数控绘图机并不能直接画出三次曲线。按现有的插补装置，绘图机所能画的基本图形通常仅限于直线和圆弧。因此需要用几段圆弧来逼近三次曲线。最简单的是用两段圆弧，即所谓双圆弧(Bolton，1975)。在实际应用时，我们将仅仅保留局部三次样条在每个型值点处的切线，把相邻两点之间的三次曲线扬弃而代之以两段圆弧。

为了让双圆弧插值具有良好的光顺性，我们首先找出局部三

次样条上的全部拐点，将它们作为新型值点插入原有型值点之间，而仍旧记作 $\{P_i\}$. 这样一来，局部三次样条的每一段内就不含有拐点.

省略指标 i, 用 P_1 和 P_2 表示相邻两个型值点，而且用 m_1 和 m_2 分别表示这段局部三次样条在 P_1 和 P_2 处的切线.

定义 设两点 P_1 和 P_2 及其两切线 m_1 和 m_2 都被给定. 引两段圆弧 D_1 和 D_2, 使满足下列条件:

(1) D_1 过 P_1 且切于 m_1, D_2 过 P_2 且切于 m_2;

(2) D_1 与 D_2 在连接点相切.

这样的方法称为**双圆弧插值**.

从定义看出，双圆弧插值其实是一种几何形式的 C^1 连续的 Hermite 插值.

我们知道平面上的圆弧唯一地决定于三个条件，从而双圆弧插值包含 6 个自由度. 可是从定义我们只有 5 个条件，所以还剩下一个自由度. 这表明连接点并不唯一确定. 我们将阐明：它的轨迹是过 P_1 和 P_2 的一段圆弧.

设两切线 m_1 与 m_2 相交于 P^* 点，两圆弧 D_1 与 D_2 在 P 点相切. 它们在 P 点的公切线 m 和 m_1, m_2 分别相交于 M_1, M_2 两点(图 9). 图中还标明了一些有向夹角 $\delta\left(-\frac{\pi}{2}<\delta<\frac{\pi}{2}\right)$, θ_1, θ_2,

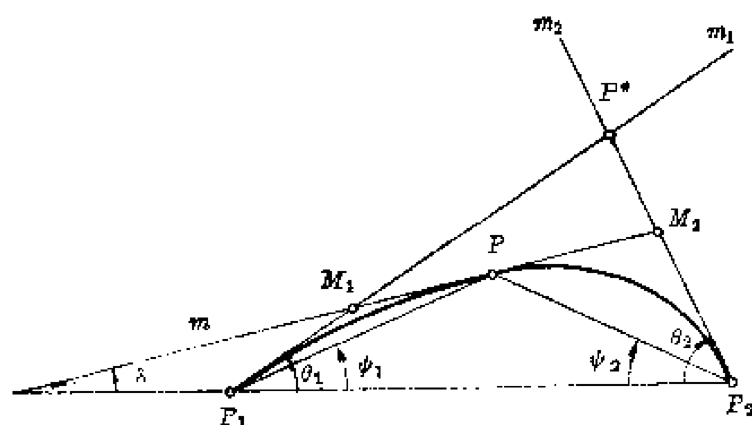


图 9

ψ_1, ψ_2. 在以后的运算中要特别注意这些角的符号.

$\triangle P_1M_1P$ 是等腰三角形，所以

$$\psi_1-\delta=\theta_1-\psi_1,$$

于是

$$\psi_1=\frac{\theta_1+\delta}{2}. \tag{4.1}$$

同样，

$$\psi_2=\frac{\theta_2+\delta}{2}. \tag{4.2}$$

在 $\triangle P_1PP_2$ 中，

$$\angle P_1PP_2=\pi-(\psi_1-\psi_2)=\pi-\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, \tag{4.3}$$

因此，切点(连接点)P 的轨迹是通过 P_1 和 P_2 的一段圆弧，记作C.

容易看出，$\triangle P_1P^*P_2$ 的内心 N 也满足(4.3)式. 就是说，内心 N 落在圆弧 C 上(图 10).

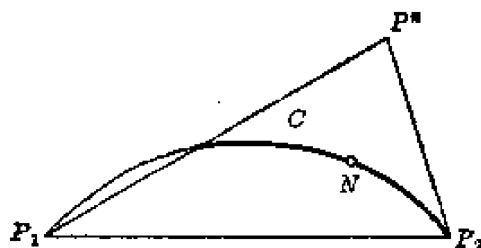


图 10

如前所述，P_1, P_2 之间的样条曲线段上无拐点，因此双圆弧不允许出现反弯的连接方式. 为了保证做到这一点，我们只能采用圆弧 C 在 $\triangle P_1P^*P_2$ 内的部分，即图 10 中圆弧 C 的粗线部分，作为双圆弧的切点所在，这就是说，

$$|\delta|<\min(|\theta_1|, |\theta_2|). \tag{4.4}$$

4.2 双圆弧半径公式

在图 11 中，我们记弦长 $\overline{P_1P_2}=L$, P 为双圆弧的连接点. O_1 和 O_2 分别是双圆弧的两个圆心. 两个半径则记成 $R_1=\overline{O_1P_1}$, R_2

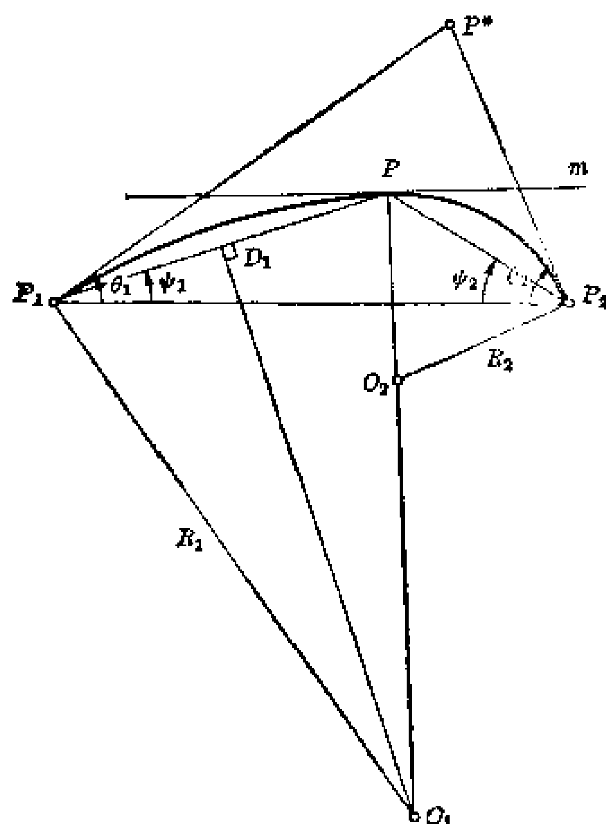


图 11

$=\overline{O_2P_2}$. 并且有 $O_1P_1\perp P_1P^*$, $O_2P_2\perp P_2P^*$.

在 $\triangle P_1PP_2$ 中，由正弦定理，

$$\overline{P_1P}=\frac{\sin\psi_2}{\sin(\psi_1-\psi_2)}L.$$

作 $O_1D_1\perp P_1P$, 于是在直角 $\triangle O_1P_1D_1$ 中求得

$$R_1=\frac{\overline{P_1D_1}}{\sin(\theta_1-\psi_1)}=\frac{\overline{P_1P}}{2\sin(\theta_1-\psi_1)}$$

$$=\frac{\sin\psi_2}{2\sin(\theta_1-\psi_1)\sin(\psi_1-\psi_2)}L$$

$$=\frac{\sin\dfrac{\theta_2+\delta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_1-\delta}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}L.$$

同样，求得 R_2. 这样一来，我们得到

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{\sin\dfrac{\theta_2+\delta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_1-\delta}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}L, \\ R_2 = \dfrac{\sin\dfrac{\theta_1+\delta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_2-\delta}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}L. \end{cases} \tag{4.5}$$

注意，半径公式中的 θ_1, θ_2, δ 都是有向角，而弦长 L 则总为正．所以 R_1 和 R_2 也带有符号．符号的意义是：若 $R_1<0$，表示第一个圆弧从 P_1 到 P 取向顺时针；反之则取向逆时针．R_2 也是一样．这为判断圆弧的走向带来了方便，而圆弧的走向则是绘图信息所需要的．事实上 (4.5) 所给出的正是双圆弧的相对曲率半径．

4.3 选择连接点

在轨迹圆弧 C 上如何选定双圆弧的一个连接点，是我们要研究的问题．当然，C 上的任何一点都是双圆弧的连接点，但是我们希望充分利用这一个自由度，使得所连接成的双圆弧尽可能地光顺．当 $\theta_1=-\theta_2$ 时，不论 δ 取何值，从 (4.5) 式看出 $R_1=R_2=\dfrac{L}{2\sin\theta_2}$，这表明双圆弧都合于同一段圆弧．今后我们将排除这种特殊情形而假定 $\theta_1\neq-\theta_2$．

目前已经有四种选择方法为实际部门所采纳．它们分别是：选择连接点 P，使得

(1) $\left|\dfrac{R_1}{R_2}-1\right|=\min$，即取 $\delta=0$．

这是我们在沪东造船厂的双圆弧样条程序中所作的选择（刘鼎元，苏文荣[1]，1980）．

(2) $|R_2-R_1|=\min$，即取 $\delta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$．

英国造船业的 BRITSHIPS 系統自 1971 年起采用这种方法 (Bolton, 1975).

(3) $\left|\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right|=\min$, 即取 $\delta=-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$.

已被中国科学院计算中心以及国内一些航空部门所采纳 (孙家昶, 郑会琳, 1980).

(4) 轨迹圆弧 C 与局部三次样条的交点 (这个交点已被证明是唯一存在的).

浙江大学在六机部十一所的绘图程序中使用了这种连接点 (董光昌、梁友栋、何援军, 1978).

前三种选择的意图是明显的, 那是为了使双圆弧的曲率或者半径的差别尽量地小, 也就是尽可能地减少曲线的臌瘪跳跃. 第四种选择则着眼于逼近: 既然认为局部三次样条是光顺的, 那末让连接点选在样条曲线上, 或许双圆弧会更近似于一段光顺的曲线. 这时双圆弧与样条曲线有五个交点 (在端点的相切被理解为相交于两点).

现在, 我们将给出有关双圆弧的一些性质, 但着重介绍第一种方法.

(1) 极值性质.

按照双圆弧半径公式(4.5), 记

$$H(\delta)\equiv\left|\frac{R_1}{R_2}-1\right|=\left|\frac{\sin\frac{\theta_2+\delta}{2}\sin\frac{\theta_2-\delta}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\delta}{2}\sin\frac{\theta_1-\delta}{2}}-1\right|$$

$$=\left|\frac{\cos\delta-\cos\theta_2}{\cos\delta-\cos\theta_1}-1\right|=\frac{A}{\cos\delta-\cos\theta_1},$$

式中常数 $A=|\cos\theta_1-\cos\theta_2|>0$. 最后一步分母中绝对值的消失是由关于 δ 的限制式(4.4). 将 H 关于 δ 求一阶和二阶导数, 立即看出当 $\delta=0$ 时, $\left|\frac{R_1}{R_2}-1\right|$ 取极小值.

用同样的方法容易证明：当取 $\delta=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 时，$|R_2-R_1|=\min$；而取 $\delta=-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ 时，$\left|\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right|=\min$.

(2) 几何意义.

当取 $\delta=0$ 时，双圆弧公切线 $m\parallel\overrightarrow{P_1P_2}$，并且此时

$$\psi_1=\frac{\theta_1}{2},\quad \psi_2=\frac{\theta_2}{2},$$

也就是，连接点恰好是 $\triangle P_1P^*P_2$ 两底角平分线的交点，即内心 N.

若取 $\delta=-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$，便有

$$\psi_1=-\psi_2=\frac{\theta_1-\theta_2}{4}.$$

这表明，连接点合于底弦 P_1P_2 的中垂线与轨迹圆弧 C 的交点 M.

对于第二种方法所取的连接点 P，其几何意义还不明显.

这三种方法的连接点依次记成 N(内心)，P，M. 当 $|\theta_1|<|\theta_2|$ 时，图 12 示意了这三点的相对位置，内心 N 介于其余两点之间.

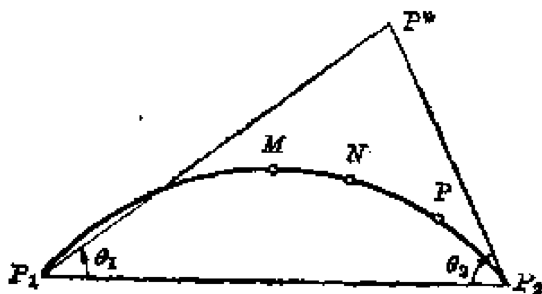


图 12

(3) 曲率单调性质.

当取 $\delta=0$ 时，假定局部三次样条曲线在相邻两型值点 P_1 和 P_2 处的同号曲率为 k_1 和 k_2，且 $k_1<k_2$，则有

$$k_1<\frac{1}{R_1}<\frac{1}{R_2}<k_2. \tag{4.6}$$

(若 $k_1>k_2$，则上式的不等号全部都要反过来.)

证明 这里，我们仅在局部小挠度假定下证明上列结论. 也就是作 $\sin\theta_1\approx\theta_1$，$\sin\theta_2\approx\theta_2$ 等线性化处理. 在不失一般性的情况下，可以假定 $k_1, k_2>0$. 于是按照(2.5)和(4.5)，并忽略高阶项，便有

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{R_1}=\dfrac{\theta_1(\theta_1-\theta_2)}{\theta_2 L}=\dfrac{(2k_1+k_2)(k_1+k_2)}{2(k_1+2k_2)}=k_1\dfrac{\left(1+\dfrac{t}{2}\right)(1+t)}{(1+2t)}, \\
\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{\theta_2(\theta_1-\theta_2)}{\theta_1 L}=\dfrac{(k_1+2k_2)(k_1+k_2)}{2(2k_1+k_2)}=k_2\dfrac{\left(1+\dfrac{t^*}{2}\right)(1+t^*)}{(1+2t^*)}.
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

其中已记$t\equiv\dfrac{k_2}{k_1}>1$, $t^*=\dfrac{1}{t}<1$. 由于

$$
\left(1+\frac{t}{2}\right)(1+t)=1+2t\left(\frac{3+t}{4}\right)\begin{cases}>1+2t, & 当\ t>1; \\ <1+2t, & 当\ 1>t>0.\end{cases}
$$

因此导得
$$
\frac{1}{R_1}>k_1,\quad \frac{1}{R_2}<k_2.
$$

再从(2.5)式, 当$0<k_1<k_2$时有$|\theta_1|<|\theta_2|$, 因而按照取$\delta=0$的(4.5)式得到

$$
\frac{\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1}}=\left(\frac{\sin\dfrac{\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}\right)^2>1.
$$

于是证明了(4.6)式.

这个结论说明了这样一桩事情: 假定一条局部小挠度的局部三次样条在型值点列$\{P_i\}$处的曲率序列$\{k_i\}$是单调的, 那末再在每段作$\delta=0$的双圆弧插值, 依次排成的圆弧的曲率序列也是同样地单调的. 这就保证了双圆弧插值曲线的光顺性. 取$\delta=0$作为连接点, 这样构造的双圆弧插值曲线的光顺性, 已经在沪东造船厂经受了数年生产实践的考验而得到证实.

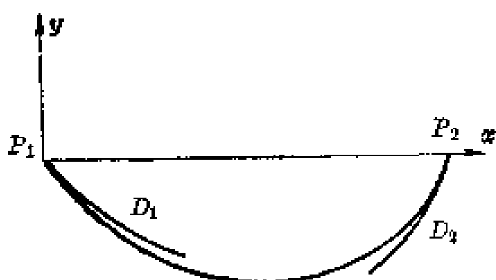


图 13

(4) 当取$\delta=0$作为连接点时, 双圆弧与局部三次样条在相邻两型值点P_1和P_2之间的一段曲线至少有一个交点.

证明　不妨假定 $0<k_1<k_2$. 按照(4.6)式,第一段圆弧 D_1 在样条曲线的内侧,第二段圆弧 D_2 则在外侧,正象图 13 表明的那样. 因此双圆弧与样条曲线至少有一个交点. 这说明 $\delta=0$ 的取法,同样能够保证双圆弧与局部三次样条有五个交点(包括两个相切端点在内).

4.4　双圆弧插值的算法

在这一段,我们将介绍沪东造船厂的数控绘图机的绘图程序中所使用的双圆弧插值算法. 这个算法 1977 年已投入该厂船体生产数控系统了.

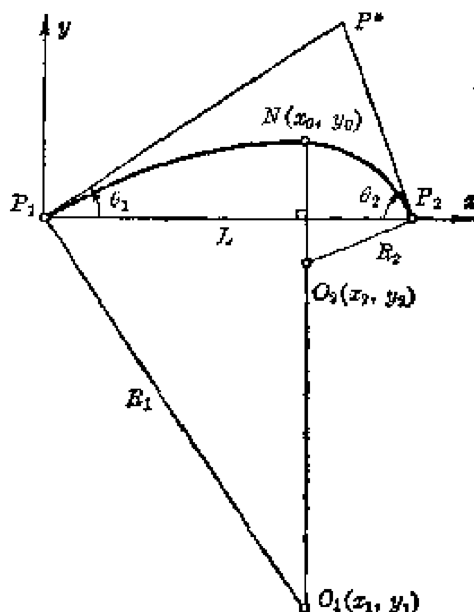


图　14

(1) 在平面上给定一组型值点列 $\{P_i\}$ 及边界条件后,按照 §2 方法构造插值的线性化局部三次样条曲线. 然后找出样条上全部拐点,作为新型值点依次插入原型值点列当中,并求得每个型值点处的切线. 这样,在每相邻两个型值点 P_1 和 P_2 之间,便得到了两端点切线与弦所夹的有向角 θ_1, θ_2, 以及 $\triangle P_1P^*P_2$.

(2) 在图 14 所表示的直角坐标系 $\{P_1;\ x,\ y\}$ 中,确定:

(i) 双圆弧的有向半径

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{\sin\dfrac{\theta_2}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}L, \\ R_2=\dfrac{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}L. \end{cases} \tag{4.8}$$

(ii) 双圆弧的连接点 $N(\triangle P_1P^*P_2$ 的内心)坐标

$$\begin{cases} x_0 = -R_1\sin\theta_1, \\ y_0 = -R_1(1-\cos\theta_1). \end{cases} \tag{4.9}$$

(iii) 双圆弧的两个圆心 $O_1(x_1, y_1)$ 和 $O_2(x_2, y_2)$ 的坐标

$$\begin{cases} x_1 = x_0, \\ y_1 = R_1\cos\theta_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_0, \\ y_2 = R_2\cos\theta_2. \end{cases} \tag{4.10}$$

算式 (4.8), (4.9), (4.10) 已经包括了为画双圆弧而输入到数控绘图机中的全部绘图信息. 其中, 双圆弧的走向信息包含在有向半径 R_1 和 R_2 的符号中: 若半径是负的, 则以顺时针方向前进,否则则相反.

算式(4.9)和 (4.10) 一般还需要附加一个我们熟知的从局部直角坐标系转换到固定直角坐标系的坐标变换, 这里就不赘述了.

§5 二次曲线偶插值

在上一节的 4.3 段,介绍了双圆弧的连接点有四种选择方案,其最后一种选在局部三次样条上的,则是基于逼近的考虑.

现在, 我们仍是从逼近的角度观察问题, 只是将圆弧偶(即双圆弧)换做更一般的二次曲线偶, 而用它为插值曲线段, 以期取得更佳的逼近效果. 这里我们仅仅叙述主要的理论结果, 而省略其具体的推导(苏步青、华宣积, 1979).

对于平面上给定的一组型值点列 $\{P_i\}$ 和边界条件, 如前先用三次样条函数进行插值(在大挠度场合, 可以用局部三次样条插值,这时除了直角坐标系作一个变换外,下面的讨论同样适用).然后找出样条上的所有拐点,作为新型值点依次插入原型值点列中,并求得每个型值点处的一阶导数$\{m_i\}$.

设在每相邻两个型值点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$之间的插值三

次样条函数是

$$S:\ y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$+\frac{1}{6}(x-x_1)(x-x_2)\left[2M_1+M_2+\frac{M_2-M_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\right],\tag{5.1}$$

式中 M_1 和 M_2 是样条 S 在 P_1 和 P_2 点的二阶导数值. 由于我们对所论的三次样条 S 已经办过插入拐点的处理手续, 所以总成立 $M_1M_2\geqslant 0$.

我们在样条 S 上任意取一点 $P_0(x_0, y_0)$ 作为二次曲线偶 (L_1, L_2) 的连接点, 使 (L_1, L_2) 分别在 P_1, P_0; P_0, P_2 等点与样条 S 相切. 那末, 其方程是

$$L_i:\ [(y-y_0)(x_i-x_0)-(x-x_0)(y_i-y_0)]^2$$
$$=C_i[(y-y_i)-m_i(x-x_i)][(y-y_0)-m_0(x-x_0)]$$
$$(i=1, 2),\tag{5.2}$$

其中 m_0, m_1, m_2 依次表示样条 S 在 P_0, P_1, P_2 三点的一阶导数值(见图 15). 首先我们得到:

引理　以 P_1 和 P_0 为两端点, m_1 和 m_0 为两端点切线, 且与样条 S 在 P_1 和 P_0 之间有一个交点 $P_1^*(x_1^*, y_1^*)$ 的二次曲线 L 必定是双曲线.

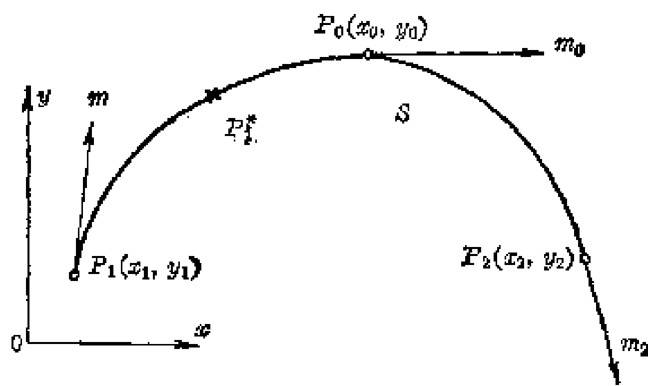


图 15

这个引理说明, 对于给定两端点 P_1, P_0 及其切线 m_1, m_0 的 Hermite 插值问题而言, 双曲线与被逼近的三次样条S有可能达到 5 个交点(相切被看成相交于两点), 而椭圆(自然包括圆弧)和抛物线则至多只有 4 个交点. 因而双曲线可能是逼近得最好的. 而

为了达到5个交点，只要在 P_1 和 P_0 之间的样条 S 上任选一点 $P_1^*(x_1^*, y_1^*)$，按照(5.2)式求得系数

$$C_1=\frac{[(y_1^*-y_0)(x_1-x_0)-(x_1^*-x_0)(y_1-y_0)]^2}{[(y_1^*-y_1)-m_1(x_1^*-x_1)][(y_1^*-y_0)-m_0(x_1^*-x_0)]}. \tag{5.3}$$

于是由(5.2)式表示的双曲线 L_1 就被唯一确定下来.

将引理再应用到 P_0 和 P_2 之间的一段样条 S，就导出：

定理 C^1 连续的二次曲线偶 (L_1, L_2) 与三次样条 S 在 P_1 和 P_2 之间最多可有8个公共点，而达到8个公共点的二次曲线偶必定是双曲线偶.

接着我们提出一个问题：双曲线偶的连接点 P_0 怎么决定?

(1) 当 $M_1M_2\neq0$ 时，只要将 P_1^* 合于 P_1，P_2^* 合于 P_2，就可使双曲线偶 (L_1, L_2) 与三次样条 S 在两端点有相同的二阶导数. 在这种场合，我们将给出两种唯一地确定连接点 P_0 的方法：

(i) 取
$$\int_{g\cap L\neq\phi} n\dot{g}=\int_{g\cap(L_1,L_2)\neq\phi} m\dot{g},$$

式中 g 表示任意直线，$\dot{g}$ 表示线密度，m 表示 g 和 (L_1, L_2) 的交点数，n 表示 g 和 L 的交点数(苏步青[8]，1979).

(ii) 取
$$|y''_{01}-y''_{02}|=\min,$$

这里 y''_{01} 和 y''_{02} 分别是 L_1 和 L_2 在 P_0 处的二阶导数值.

(2) 当 $M_1M_2=0$ 时，比如 $M_1=0$，则可取

$$x_0=x_1+\frac{3\sqrt{2}-2}{4}(x_2-x_1),$$

便能使 (L_1, L_2) 在连接点 P_0 处达到 C^2 连续，且使

$$|(y''_{11}-M_1)-(y''_{22}-M_2)|=\min,$$

式中 y''_{11} 和 y''_{22} 分别表示 L_1 在 P_1 点和 L_2 在 P_2 点的二阶导数值.

采用双曲线偶 (L_1, L_2) 将比双圆弧更逼近于三次样条 S，因为前者与 S 有8个交点，而后者只有5个. 假如将这套方法应用

于配备有双曲线插补装置的数控绘图机,在相同的逼近精度之下,估计能够节省将近一半绘图信息. 这件事情对于提高绘图速度,减少数据存贮量是有意义的.

§ 6 圆弧样条曲线

如在 § 4 所述, 为了绘图信息的需要,我们在用样条对型值点插值之后,还要用圆弧来逼近样条,这称为"后置处理". 能不能省略这一步而直接用 C^1 连续的圆弧样条进行插值呢? 这就是构造圆弧样条想法的来由(孙家昶[2], 1977).

在平面上给定一组型值点 $P_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 后, 过每一点 P_i 作圆弧 C_i, 记圆弧在 P_i 处的切线为 m_i. 于是, 相邻两个型值点 P_i 和 P_{i+1} 之间圆弧 C_i 与 C_{i+1} 的 C^1 连接问题, 便转化成为一个在已知两端点及其切线 m_i 和 m_{i+1} 条件下的双圆弧连接问题. 关于双圆弧的有关公式在添上指标 i 之后可以照搬过来. 为了让圆弧样条带有一定的对称性,我们把连接点定在弦 P_iP_{i+1} 的中垂线与轨迹圆弧的交点 M_i 处(见图 16). 按照 § 4 的讨论, 知道这相当于取 $\delta=-\dfrac{\theta_1^{(i)}+\theta_2^{(i)}}{2}$. 于是从双圆弧半径公式(4.5)导得圆弧 C_i 在 P_i 和 P_{i+1} 之间一段的半径为

图 16

$$R_1^{(i+1)}=\frac{-L_{i+1}}{4\sin\dfrac{3\theta_1^{(i+1)}+\theta_2^{(i+1)}}{4}\cos\dfrac{\theta_1^{(i+1)}-\theta_2^{(i+1)}}{4}}. \tag{6.1}$$

而圆弧 C_i 在 P_{i-1} 和 P_i 之间一段的半径为

$$R_1^{(i)}=\frac{L_i}{4\sin\dfrac{\theta_1^{(i)}+3\theta_2^{(i)}}{4}\cos\dfrac{\theta_1^{(i)}-\theta_2^{(i)}}{4}}. \tag{6.2}$$

由于这两半圆弧是同一圆弧 C_i 的两部分，它们在 P_i 点的切线与半径应该相同，所以

$$\begin{cases}\theta_2^{(i)}-\theta_1^{(i+1)}=\varphi_i,\\ R_2^{(i)}=R_1^{(i+1)}.\end{cases} \tag{6.3}$$

从(6.1)，(6.2)，(6.3)导得

$$-\lambda_i\sin\frac{\theta_{i-1}+3\theta_i+3\varphi_i}{4}\cos\frac{\theta_{i-1}-\theta_i-\varphi_i}{4}$$

$$=\mu_i\sin\frac{3\theta_i+\theta_{i+1}+\varphi_{i+1}}{4}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}-\varphi_{i+1}}{4}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{6.4}$$

式中 $\theta_i=\theta_1^{(i+1)}$, $\lambda_i=\dfrac{L_{i+1}}{L_i+L_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{L_i}{L_i+L_{i+1}}$.

对非线性方程组 (6.4) 直接求解将是困难的. 我们对它作线性化处理. 将(6.4)中三角函数展开并分出主部，经过整理，便得到圆弧样条的 θ 连续性方程

$$\lambda_i\theta_{i-1}+3\theta_i+\mu_i\theta_{i+1}=-3\lambda_i\varphi_i-\mu_i\varphi_{i+1}+H_i$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{6.5}$$

式中

$$H_i=\mu_i\left[\theta_{i+1}+\varphi_{i+1}-4\sin\frac{3\theta_i+\theta_{i+1}+\varphi_{i+1}}{4}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}-\varphi_{i+1}}{4}\right]$$

$$+\lambda_i\left[\theta_{i-1}+3\varphi_i-4\sin\frac{\theta_{i-1}+3\theta_i+3\varphi_i}{4}\cos\frac{\theta_{i-1}-\theta_i-\varphi_i}{4}\right]+3\theta_i.$$

容易看出 $H_i=O(\varphi^3)$，这里 $\varphi=\max\limits_i|\varphi_i|$，是比主部 $-3\lambda_i\varphi_i-\mu_i\varphi_{i+1}$ 高二阶的无穷小量. 当添上两个适当的边界条件之后，用简单迭代法就能从方程组(6.5)中解得$\{\theta_i\}$. 代入(6.2)，不但得到 P_i 处圆弧 C_i 的半径，还可求 C_i 的圆心的坐标. 这样便构造了 C^1 连续

的插值圆弧样条.

圆弧样条的θ连续性方程(6.5)同第三章所述的累加弦长三次参数样条的θ连续性方程相类似：只要将前者左端中间项的系数3都改成2，便成为后者，只是高阶项$O(\varphi^3)$有些差别而已. 这说明，在局部小挠度场合，圆弧样条的保凸性比累加弦长三次参数样条略强，但光顺性则稍差. 我们还可以证明，圆弧样条的逼近阶为$O(\varphi^3)$，比累加弦长三次参数样条的逼近阶低一阶. 一般说来，圆弧样条适用于光顺性要求不太高的场合.

圆弧样条相应的k连续性方程是

$$\mu_i k_{i-1}+3k_i+\lambda_i k_{i+1}=4K_i+O(\varphi^2)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{6.6}$$

式中k_i表示圆弧C_i在P_i处的曲率$\frac{1}{R_2^{(i)}}$，K_i表示P_i处的圆率.

假定把局部三次样条和圆弧样条分别与第二章的插值三次样条和插值二次样条相比较，将会发现前者的θ连续性方程和k连续性方程恰好分别对应于后者相应的m连续性方程和M连续性方程. 前者在连续性方程中出现的仅仅是同坐标系选择无关的几何量，从而简单地解决了函数样条因过于依赖坐标系而引起的大挠度困难. 关于保凸性也有着相类似的情况.

现在，我们已经看到了几何形式的样条怎样要比函数形式的样条更加适合于几何外形计算的需要. 当然，几何形式的样条也有自己的难处，那就是问题的非线性所带来的数学处理困难. 不过，这样一类难问题的出现反而吸引了许多学者去运用更多样化的工具，试图打开这个非线性硬壳.

人们或许可以这样认为：几何化和非线性，是近年来计算几何方法的显著特征，它正有力地推动着计算几何学科向深度和广度迈进.

§7 局部张力样条曲线

在第二章，我们从张力样条的数学模型导出了曲率微分方程

$$\frac{d^2k}{ds^2}-\rho^2k=0, \tag{7.1}$$

其中张力参数 $\rho>0$, s 是曲线的弧长参数. 与第二章所不同的是我们在这里将取消小挠度的假定(刘鼎元[2]，1979).

讨论相邻两个型值点 P_1 和 P_2 之间的一段张力样条. 设它在两端点的曲率为 k_1 和 k_2, 曲线段的全弧长为 s_0, 弦长 $L=\overline{P_1P_2}$. 于是(7.1)式的解是双曲函数

$$k=k_1\frac{\operatorname{sh}\rho(s_0-s)}{\operatorname{sh}\rho s_0}+k_2\frac{\operatorname{sh}\rho s}{\operatorname{sh}\rho s_0}. \tag{7.2}$$

取如图 17 所示的局部直角坐标系 $\{P_1;\ x,\ y\}$. 设曲线段在 s 点的切线与 x 轴的有向夹角为 θ, 则有

$$\theta=\int k\,ds=-k_1\frac{\operatorname{ch}\rho(s_0-s)}{\rho\operatorname{sh}\rho s_0}+k_2\frac{\operatorname{ch}\rho s}{\rho\operatorname{sh}\rho s_0}+c, \tag{7.3}$$

这里 c 是积分常数. 曲线段在局部直角坐标系中的方程为

$$\begin{cases} x=\int_0^s\cos\theta\,ds=\int_0^s[1+O(\theta^2)]ds=s+O(\theta^3), \\ y=\int_0^s\sin\theta\,ds=\int_0^s[\theta+O(\theta^3)]ds \\ \quad =k_1\frac{\operatorname{sh}\rho(s_0-s)}{\rho^2\operatorname{sh}\rho s_0}+k_2\frac{\operatorname{sh}\rho s}{\rho^2\operatorname{sh}\rho s_0}+cs-\frac{k_1}{\rho^2}+O(\theta^4). \end{cases} \tag{7.4}$$

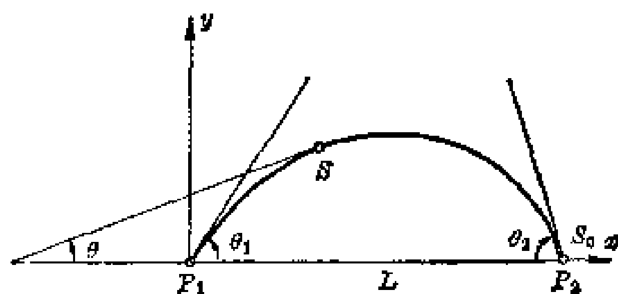


图 17

在(7.4)中，取 $s=s_0$，曲线段上的对应点是 $P_2(L, 0)$ 点，因而积分常数

$$c=\frac{k_1-k_2}{\rho^2 s_0}+O(\theta^3).$$

在(7.3)式中，分别取 $s=0$, s_0，便得到两端点 P_1 和 P_2 处的切线角

$$\begin{cases}\theta_1=-\dfrac{k_1}{\rho^2}\left(-\dfrac{1}{s_0}+\dfrac{\rho\operatorname{ch}\rho s_0}{\operatorname{sh}\rho s_0}\right)-\dfrac{k_2}{\rho^2}\left(\dfrac{1}{s_0}-\dfrac{\rho}{\operatorname{sh}\rho s_0}\right)+O(\theta^3),\\ \theta_2=\dfrac{k_1}{\rho^2}\left(\dfrac{1}{s_0}-\dfrac{\rho}{\operatorname{sh}\rho s_0}\right)+\dfrac{k_2}{\rho^2}\left(-\dfrac{1}{s_0}+\dfrac{\rho\operatorname{ch}\rho s_0}{\operatorname{sh}\rho s_0}\right)+O(\theta^3).\end{cases} \tag{7.5}$$

由于弦长

$$L=s_0+O(\theta^3),$$

(7.5)中的 s_0 可以换成 L 而不影响等号的成立，因为由于这种替换而产生的高阶项全部被吸收到余项 $O(\theta^3)$ 中去了。于是有

$$\begin{cases}\theta_1=-dk_1-ek_2+O(\theta^3),\\ \theta_2=ek_1+dk_2+O(\theta^3),\end{cases} \tag{7.6}$$

式中 $\quad e=\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{1}{L}-\dfrac{\rho}{\operatorname{sh}\rho L}\right),\ d=\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\rho\operatorname{ch}\rho L}{\operatorname{sh}\rho L}-\dfrac{1}{L}\right).$

在平面上给定一组型值点 $P_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 后，为了导得插值张力样条曲线的连续性方程，我们仍然采用在处理几何样条时用过的那种方法. 先在(7.6)式添上指标 i，再利用§1的图4和切线连续关系式(1.10)，得到张力样条曲线的 k 连续性方程

$$e_ik_{i-1}+(d_i+d_{i+1})k_i+e_{i+1}k_{i+1}=\varphi_i+O(\varphi^3)$$
$$(i=1, 2, \cdots, n-1), \tag{7.7}$$

式中

$$\begin{cases}e_i=\dfrac{1}{\rho_i^2}\left(\dfrac{1}{L_i}-\dfrac{\rho_i}{\operatorname{sh}\rho_iL_i}\right),\\ d_i=\dfrac{1}{\rho_i^2}\left(\dfrac{\rho_i\operatorname{ch}\rho_iL_i}{\operatorname{sh}\rho_iL_i}-\dfrac{1}{L_i}\right).\end{cases}$$

其中 ρ_i 是在型值点 P_{i-1} 和 P_i 之间(第 i 段)的张力参数，而 $\varphi=\max\limits_i|\varphi_i|$. 当附加两个适当的边界条件之后，就构成完整的连续性方程组.

实用上为方便，我们可把连续性方程组(7.7)中的高阶项 $O(\varphi^3)$ 省略掉，且把由此得到的一组线性代数方程组记作(7.7)*. 同样地，在第 i 段曲线在局部直角坐标系里的插值公式 (7.4) 中也把高阶项 $O(\theta^3)$ 和 $O(\theta^4)$ 省略掉，使它成为

$$y=k_{i-1}\frac{\operatorname{sh}\rho_i(L_i-x)}{\rho_i^2\operatorname{sh}\rho_iL_i}+k_i\frac{\operatorname{sh}\rho_ix}{\rho_i^2\operatorname{sh}\rho_iL_i}+\frac{k_{i-1}-k_i}{\rho_i^2L_i}x-\frac{k_{i-1}}{\rho_i^2}. \tag{7.8}$$

从 (7.7)* 和 (7.8) 产生的样条曲线，在每个型值点 P_i 处的曲率有一个跳跃量为 $O(\varphi^3)$ 的小间断，这种小间断在局部小挠度场合是完全可以忽略不计的. 这种经过线性化处理的样条称为局部张力样条曲线. 它与第二章中所讨论的张力样条函数之间的关系，同线性化局部三次样条与插值三次样条函数间的关系完全一样.

类似地，选择保凸张力参数$\{\rho_i\}$的问题，则归结于在所有 $\rho_i\geqslant0$ 的条件下求解非线性不等式组:

$$\varphi_i>\frac{e_i}{d_{i-1}+d_i}\varphi_{i-1}+\frac{e_{i+1}}{d_{i+1}+d_{i+2}}\varphi_{i+1}$$
$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n). \tag{7.9}$$

相仿地，我们可以导出判别线性化局部三次样条曲线保凸的一个充分条件:

$$K_i>\frac{1}{2}(\mu_iK_{i-1}+\lambda_iK_{i+1})\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n), \tag{7.10}$$

式中 K_i 代表型值点列在P_i 处的圆率(不妨假定所有圆率都为正)，

其中 $$\lambda_i=\frac{L_{i+1}}{L_i+L_{i+1}},\quad \mu_i=\frac{L_i}{L_i+L_{i+1}}.$$

§8　决定型值点切线的局部方法

本章§4和§5中的讨论，完全是应数控加工工艺的需要而展开的．在那里，为了实施双圆弧插值或二次曲线偶插值，一个前提条件是需要获得每个型值点处的切线．对于这一环节，我们通过对线性化局部三次样条曲线的连续性方程的求解而达到目的．为计算某一型值点处的切线，需要涉及全部型值点的位置，因而是一种隐式表示的整体方法．

本节我们将介绍两种显式表示型值点切线的局部方法，只须三、五个型值点便能决定中间一点处的切线．因此计算较为简单，甚至手算也能解决问题．但是它们只是经验性的方法，看不出有什么理论上的背景．而且逼近阶较低，因而光顺性也略差些．

8.1　Bessel　方　法

在平面上取定直角坐标系．设给定的型值点是 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，相邻两型值点 P_{i-1} 和 P_i 之间的一阶差商

$$D_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}. \tag{8.1}$$

过 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 三点作插值二次多项式，容易求得这条正抛物线在 P_i 处的切线斜率

$$m_i=\lambda_i D_i+\mu_i D_{i+1}\quad(i=1, 2, \cdots, n-1), \tag{8.2}$$

其中权因子 $\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, $h_i=x_i-x_{i-1}$.

按照(8.2)式决定 P_i 处切线斜率 m_i 的方法通称 Bessel 方法.

8.2　秋间 (Akima) 方法

这种方法首次发表于1970年．型值点 P_i 处的切线斜率是这样确定的：

$$m_i = \alpha_i D_i + \beta_i D_{i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1), \tag{8.3}$$

式中权因子

$$\alpha_i = \frac{W_{i+1}}{W_{i-1}+W_{i+1}},\ \beta_i = \frac{W_{i-1}}{W_{i-1}+W_{i+1}},\ W_i = |D_{i+1}-D_i|.$$

这两种方法实际上是取 P_i 处的切线斜率作为相邻两条弦线 $P_{i-1}P_i$ 和 P_iP_{i+1} 斜率的加权平均. 第一种方法的权因子仅仅涉及 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 三个点; 第二种则涉及到 P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2} 五个点. 反映在几何图形上,就是让 P_i 处的切线夹在相邻两条弦线之间, 至于更偏近哪一条弦线, 则由邻近三个点或五个点的位置定量地加以确定.

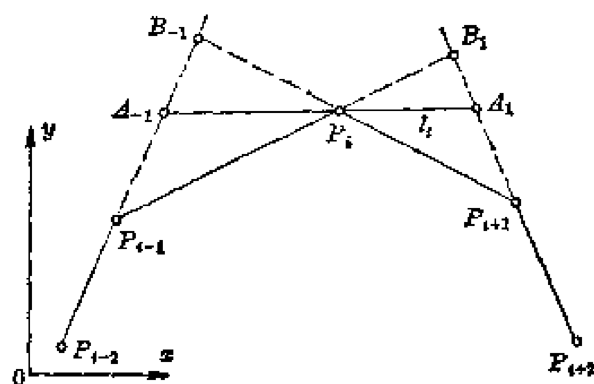


图 18

假如要追根究源, 秋间方法确是发端于一种几何直观的. 在图 18 中, 给定了相邻五个型值点 P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, 我们用直线连接每相邻两个型值点. 把直线 $P_{i-1}P_{i-2}$ 与 P_iP_{i+1} 的交点记作 B_{-1}, 把直线 $P_{i-1}P_i$ 与 $P_{i+1}P_{i+2}$ 的交点记作 B_1. 假定中间点 P_i 处的切线 l_i 与直线 $P_{i-1}P_{i-2}$ 及 $P_{i+1}P_{i+2}$ 的交点分别为 A_{-1} 和 A_1, 那末按照本法, P_i 处的切线 l_i 是由下列几何条件来决定:

$$\frac{\overline{P_{i-1}A_{-1}}}{\overline{A_{-1}B_{-1}}} = \frac{\overline{P_{i+1}A_1}}{\overline{A_1B_1}}. \tag{8.4}$$

在取定适当的直角坐标系后,按照(8.4)式的坐标表示容易证明, 切线 l_i 的斜率 m_i 确实满足 (8.3) 式, 只是其中的 α_i 和 β_i 应该改写成

$$\alpha_i^* = \frac{U_iV_{i+1}}{U_iV_{i+1}+U_{i+1}V_{i-1}},\quad \beta_i^* = 1-\alpha_i^*;$$

$$U_i = \sqrt{|D_{i+1}-D_{i-1}|},\quad V_i = \sqrt{|D_{i+1}-D_i|}.$$

这些就是起初选择的权因子. (8.3)式中的权因子 α_i, β_i 则是改进以后的样式.

为决定切线 l_i 的斜率 m_i 而用的这两种方法, 自然依赖于坐标系的选择. 我们在上面提到的"取定适当的直角坐标系", 那意味着尽可能地把问题变为最适当的小挠度. 否则, 在大挠度场合, (8.3) 式权因子 W_i 中将会出现两大数相减而发生计算不稳定的情况. 我们已经好几次看到, 当一种方法过分地依赖于坐标系的选择时, 往往产生大挠度问题. 而克服大挠度困难的有效手段, 就是把问题几何化.

在 Bessel 方法中, 几何化的手续可以这样来办: 将斜率和一阶差商都对应成夹角, x 轴上的坐标差 h_i 则改换成距离 L_i. 比如, 取图 19 中的

$$\theta_i=\lambda_i\varphi_i, \tag{8.5}$$

这里 $\lambda_i=\dfrac{L_{i+1}}{L_i+L_{i+1}}$, 且 $L_i=\overline{P_{i-1}P_i}$, 就几何地决定了 P_i 点处的切线 l_i. 需要注意的是 (8.5) 式所用的 θ_i 和 φ_i 都是无向角. 事实上, 按这种方法获得的切线 l_i, 在忽略 $O(\varphi_i^3)$ 的意义下, 合同于过 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 三点所作的圆在 P_i 点的切线.

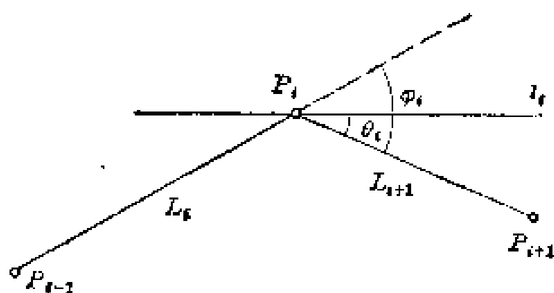


图 19

对于秋间方法的几何化, 也可以按照 (8.5) 式来决定 P_i 点的切线 l_i, 只是式中的权因子应修改成面积形式的几何量

$$\lambda_i=\frac{W_{i+1}}{W_{i-1}+W_{i+1}},\quad W_i=|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\times\overrightarrow{P_iP_{i+1}}|.$$

按照这两种方法的本意, 原是完整的函数插值方法: 第一步先求得每个型值点处的切线斜率; 第二步在每相邻两个型值点之间用三次多项式作 Hermite 插值. 我们在几何外形计算中仅仅

用了它们的第一部分决定切线斜率的结果，而舍弃了第二步的分片三次多项式插值部分．但是从函数逼近论的角度考虑，作为两种完整的 C^1 连续函数插值方法，则已经获得这样的结论：Bessel 分片三次插值函数的逼近阶是 $O(h^3)$（当节点分布不均匀时），而秋间分片三次插值函数的逼近阶只有 $O(h^2)$，这里 $h=\max_i h_i$．我们已经知道插值三次样条函数的逼近阶是 $O(h^4)$，在小挠度场合便相当好地逼近木样条而具有令人满意的光顺性．从逼近阶的差别大致可以估计到 Bessel 方法和秋间方法的光顺性或许不够理想．

为了探索型值点处切线的求法，我们在沪东造船厂曾做过一系列数值试验．对于(8.3)形式的加权平均切线法，曾经尝试过多种样式的权因子选择，包括本节所述的方法，在已经给定的光顺型值点上均未能构造出光顺的插值曲线来．

因此，我们的印象是，上面介绍的两种方法一般适用于光顺性要求不高的场合．它们毕竟还有着计算简单、构造局部、修改方便等优点，而且方法本身也很富有几何特色．

第七章　曲线和网格的光顺

§1　光 顺 准 则

我们在第二、三、六章已经讨论了各种类型的插值样条函数和插值样条曲线. 在那里，已经简略地涉及到曲线的光顺性概念，而且论证了模拟木样条的插值曲线是最光顺的曲线. 但是，为了构造一条光顺的曲线，建立起木样条的数学模型仅仅是问题的一半. 问题的另一半在于那组给定的插值点列光顺不光顺？假定随随便便给出一组呈锯齿分布的型值点列，那末不管用什么样条插值，都必定是拐来拐去很不光顺. 要是再用这类不光顺的曲线组合成曲面，其结果就象一只摔得坑坑洼洼的钢精锅子那样难看.

这就要问：什么叫"光顺的"型值点列？怎样得到光顺的型值点列？

在造船、航空、汽车等工业部门的几何外形计算工作中，人们最终都希望能获得一个光顺的几何外形. 在外形数学放样中，几何外形信息一般由型值点列给出. 而在几何外形设计中，象数学船型和飞机外形的数学模型等，则还有别的表示手段，比方 Bézier 曲面或 B 样条曲面的特征网格就表示了一张曲面.

因此，更一般的提法是：什么叫"光顺的"几何外形？怎样构

造光顺的几何外形?

本章的内容就是对上述问题的回答. 其中，对前一问题作出解答,是本节的目的.

我们在上一章§1中曾提到曲线的光顺性概念，它包括光滑和顺眼两个方面. 光顺概念涉及到几何外形的美观性，这一点不免带有浓厚的主观色彩. 比方取船体手工放样为例，最后要求船体线型达到"眼观光顺"，就是肉眼看来"舒服". 对同样一组型值点列,不同人的放样结果自然不尽相同. 但是仔细比较一下,则往往大同小异，相去甚近. 这就表明，光顺概念还有着客观性的一面. 把这一方面抽象出来,便成为一种光顺准则.

定义1 凡满足下列三条准则的平面曲线叫做光顺的曲线:

(1) 曲线 C^2 连续;

(2) 没有多余拐点;

(3) 曲率变化较均匀.

其中条件(1)是数学上的光滑概念,只涉及到每一点及其一个充分小邻域，因而是一个局部的概念. 条件(2)和(3)则是对整条曲线而言，是一个整体的概念，处理起来比局部概念要困难和复杂. 实用上，整体的光顺性甚至比局部的光滑性更为要紧. 我们在上一章双圆弧插值中，放弃了严格的 C^2 连续性，虽然曲线在连接处的曲率有一个小跳跃,但却不会被人们感觉到. 相反,若在平直段上多了两个拐点,即使拐得非常轻微,人们也会感到难看.

光顺准则(2)是我们用来控制曲线的凹凸变化,以期达到拐点尽可能少些的目的. 举正弦曲线为例,尽管它是很光滑,但由于有很多拐点,整条曲线不能被认为是光顺的. 人们在几何外形计算中处理非线性问题时,宁可采用幂级数表示而从来不借助于 Fourier 展开式,原因就在于此.

光顺准则(3)的作用在于对曲线瘪瘪变化的控制. 瘪和瘪的地方就是曲线上曲率局部极值处. 具体地说，这条准则表明了几

点要求：(i)曲线上的曲率极值点尽可能少些；(ii)相邻两个极值点之间的曲率尽可能接近线性变化．我们在上一章中所论述的几何样条以及其一阶近似线性化的局部三次样条(当然还包括累加弦长三次参数样条等)，是木样条的一个很好的数学模拟．如取它们作为插值样条，便能保证这条准则后半的要求．对于前半的要求，我们将在下一节曲线光顺中分析和解决．

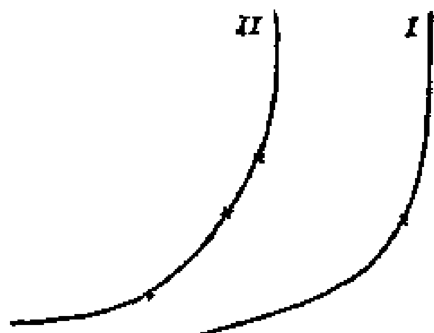
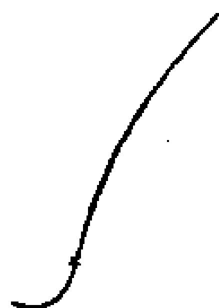


图 1

我们试比较在图1中画出的两条曲线．容易看出，曲线I仅有一个用叉号标出的曲率极值点，曲线II则有三个曲率极值点．尽管这两条曲线上都没有一个拐点，曲线II仍然是不光顺．

这三条准则是从大量从事于几何外形计算的人们在长期实践中归纳出来，而且普遍适用于几何外形的极大多数线型的．有时也会出现少数例外．比方图2中所示的一条船体艏部肋骨线，在叉号处曲率有一个从正到负的大跳跃．然而人们不但觉得这条曲线是光顺的，还认为这个曲率大跳跃是必需的．假定放到别的场合，很可能将它归入不光顺的一类．对于计算程序中的这种少数例外情形，我们不难作出个别处理．


图 2

在空间曲线的场合，一般不必另外作出光顺性定义，只要把曲线投影到三个正交平面上，而且用这三条投影曲线的光顺性作为空间曲线的光顺性判据就可以了．

文献上很少见到对曲面光顺准则的研究．一种提法是：用任意一张平面与曲面的截口曲线的光顺性作为曲面的光顺性判据．但是这种准则难以付诸实用．在实际应用中人们仅仅利用曲

面上两族或三族网格线的光顺性作为曲面的光顺准则. 比方, 在船体放样中, 按照传统的工艺习惯, 只要把横剖线、水线和直剖线这三族剖面线的网格弄光顺了, 就认为已达到船体曲面的光顺. 因此, 曲面的光顺性问题转换成网格的光顺性问题. 这些将在 § 3 中叙述.

在几何外形的设计问题中, 为了运用光顺准则, 我们不妨事先给定曲线的拐点个数以及拐点所在的区域范围, 使光顺准则(2)有一个定量的依据. 关于设计, 目前虽能提供多种方法和手段, 但我们还是推荐三次 B 样条曲线和三次 B 样条曲面. 这是由于三次 B 样条曲线的光顺性容易被它的特征多边形所控制的缘故(详见第四章 3.3 节).

与几何外形的设计问题不同, 在几何外形的数学放样, 比方船体线型的数学放样中, 人们必然要处理设计部门给出的型值点, 因此有必要回答我们在一开头提出的问题: 什么叫光顺的型值点列?

定义 2　对于平面上给定的一组型值点列 $\{P_i\}$, 如果至少能够找到一条光顺的插值曲线, 就称 $\{P_i\}$ 是光顺的.

在几何外形数学放样中, 我们除了对原始型值点进行光顺外, 还必须使修改后的型值点同原型值点偏离小, 以保证设计部门给出的各项性能指标(如船体排水量等)不致于受到影响.

对于给定的一组型值点 $\{P_i\}$, 构造一条曲线依次通过每一点, 称为**插值**. 假定不是严格通过每一点, 只是贴近这些点, 则称为**拟合**. 我们需要附加其他条件来规定贴近的原则. 因此, 本章所要讨论的内容实际上是附加光顺性条件的曲线拟合法. 当然, 插值可以被看成拟合的一个特例. 在几何外形设计的一些文章中, 人们往往不加区分地把这两种概念统称为拟合. 但本书则按照数学的习惯术语将这两者明确地区别开来.

§2 曲线的光顺

本节所介绍的各种曲线光顺方法，主要是为几何外形的数学放样服务的．就是说，在设计部门给出一组可能不太光顺的型值点列之后，为了构造一条光顺的拟合曲线，我们修改原始型值点列，使其光顺．

其中，圆率法和能量法处理型值点列或拟合曲线的方式同坐标系选取无关，是完全几何化的．因而它适用于大挠度曲线或封闭曲线．其余各种方法则仅适用于小挠度场合．能量法采用了累加弦长三次参数样条作为拟合曲线，它还具有直接光顺空间曲线的功能．

圆率法的另一个特点是，在整个光顺过程中不用插值曲线．这意味着：直接考察离散的型值点列的几何位置，便能迅速找到坏点，并求出修改的距离．因此，这方法有着简单、快速的优点．

最小二乘法、能量法和回弹法都是用到全部型值点来修改，就是一种整体修改的办法．基样条法和圆率法则是选点修改，即保留好点，只改动坏点，而且尽可能少改动．多年来，江南造船厂和沪东造船厂一直运用这两种方法．

本节仅仅介绍了几种主要的较有影响的曲线光顺方法．实质上，这些方法相差无几，经过一番沟通，就会发现好几种方法之间有着某种内在联系．

2.1 最小二乘法

六十年代初，国际上船体数学放样刚刚开始兴起的时候，最小二乘法是最有影响的一种光顺方法．这里概述其大意如下．

在平面上给定了一组用坐标表示的型值点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, \cdots, n)$，在 x 轴上，我们便有 $[a, b]$ 区间内相应的分割：

$$\Delta: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

在分割 Δ 上的三次样条函数则取截断幂级数表示：

$$S(x)=\sum_{i=0}^{3}a_ix^i+\sum_{i=1}^{n-1}b_i(x-x_i)_+^3 \quad x\in[a,\ b]. \tag{2.1}$$

式中，我们已置

$$x_+=x,\ \text{当}\ x>0,$$
$$x_+=0,\ \text{当}\ x\leqslant 0;$$

$n+3$ 个系数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 唯一地决定于下述目标函数 I 的极小. 这样，我们获得一条逼近地通过原型值点 $\{P_i\}$ 的三次样条 $S(x)$. $S(x)$ 所代表的曲线称为最小二乘光顺曲线. 点 $P_i^*(x_i,\ S(x_i))$ $(i=0,\ \cdots,\ n)$ 称为光顺型值点.

比较普遍采用的一种目标函数是

$$I\equiv\sum_{i=0}^{n}\alpha_i[S(x_i)-y_i]^2+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_ib_i^2. \tag{2.2}$$

式中 $2n$ 个正权因子 $\alpha_i(i=0,\ \cdots,\ n)$ 和 $\beta_i(i=1,\ \cdots,\ n-1)$ 是由操作者人为地事先予以给定的. 从下面两种极端情况的分析可以看出这些权因子的具体意义.

(1) 当取所有的 $\beta_i=0,\ \alpha_i\neq 0$ 时，从 $I=\min$ 立即得到

$$S(x_i)=y_i \quad (i=0,\ \cdots,\ n),$$

于是(2.1)变成插值三次样条函数. 就是说，三次样条函数 $S(x)$ 点点通过原型值点 $\{P_i\}$. 这表明，所有光顺后的型值点 $\{P_i^*\}$ 合同于原型值点 $\{P_i\}$，丝毫没有偏离.

(2) 当取所有的 $\alpha_i=0,\ \beta_i\neq 0$ 时，从 $I=\min$ 导得

$$b_i=0 \quad (i=1,\ \cdots,\ n-1),$$

(2.1)式成为一个整体三次多项式

$$S(x)=\sum_{i=0}^{3}a_ix^i,$$

$S(x)$ 在各内节点 x_i 处的剪力跃度 b_i 全部为零. 按照样条的力学模型，剪力跃度 b_i 代表样条在型值点 P_i 处的回弹力. 所以这时

的样条 $S(x)$ 表示了一条最光顺的曲线.

对介于这两种极端之间的各种情况,我们从$\{\alpha_i\}$与$\{\beta_i\}$的对比可以了解到，当$\{\alpha_i\}$取大数时，光顺后的型值点$\{P_i^*\}$与原型值点$\{P_i\}$的偏离就很小，而剪力跃度$\{b_i\}$可能较大，曲线的光顺性缺乏保证．反之，当$\{\beta_i\}$取大数时，剪力跃度$\{b_i\}$就很小，曲线也就光顺，但$S(x_i)$与y_i的偏离或许要较多，以致曲线的逼近度较差．因此，我们称$\{\alpha_i\}$为偏离权，$\{\beta_i\}$为光顺权．光顺和偏离是一种对立统一的关系．操作者的任务是根据具体问题的要求，适当选定偏离权$\{\alpha_i\}$和光顺权$\{\beta_i\}$，使得偏离和光顺两个方面都得到兼顾．通常选择权因子的方法是根据经验进行的.

将(2.1)代入(2.2)，目标函数变为样条$S(x)$中$n+3$个系数的函数:

$$I=I(a_0,\ \cdots,\ a_3;\ b_1,\ \cdots,\ b_{n-1}).$$

于是，极小化目标函数I的问题便归结为$n+3$个未知数$a_0,\ \cdots,\ a_3;\ b_1,\ \cdots,\ b_{n-1}$的线代数方程组求解，即:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I}{\partial a_i}=0 \quad (i=0,\ \cdots,\ 3),\\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial b_j}=0 \quad (j=1,\ \cdots,\ n-1).\end{cases} \tag{2.3}$$

可以证明，方程组(2.3)的解唯一存在．可是从数值计算的角度看，当n增大时，方程组(2.3)的系数矩阵的病态程度将急剧增加，引起计算的不稳定．如我们在第二章指出的那样，这个缺点是因为三次样条函数取截断幂级数为基底而出现的，但它并不是本质的．只要改取三次B样条函数作为基底，便不会出现这个问题．而且，这时(2.3)的系数矩阵呈现七对角的带状结构，求解简单．相反，在截断幂级数表示时，(2.3)的系数矩阵是满的，它将占用较多的内存.

关于最小二乘法的实质性缺点，我们这里不加叙述.

2.2 能 量 法

1969年穗坂衞在能量极值原理的基础上给出了一种包括光顺空间曲线和大挠度曲线在内的光顺方法. 它的基本思想同最小二乘法一样，是偏离和光顺两部分的加权综合. 不同之处在于：

(1) 采用累加弦长三次参数样条作为拟合曲线.

(2) 目标函数中的剪力跃度部分改成样条的能量积分.

能量法的力学模型相当直观. 在空间给定一组待光顺的型值点 $Q_i(i=0, \cdots, n)$. 过光顺后的型值点 $P_i(i=0, \cdots, n)$ 作一条插值的弹性线，而且在 P_i 与 Q_i 两点间挂一条弹性系数为 α_i 的小弹簧（见图3）. 这样一来，包括弹性线和小弹簧在内的整个系统的内能

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(P_i-Q_i)^2+\frac{1}{2}(EI)^2\int k^2ds, \tag{2.4}$$

式中常数 EI 为弹性线的刚度.

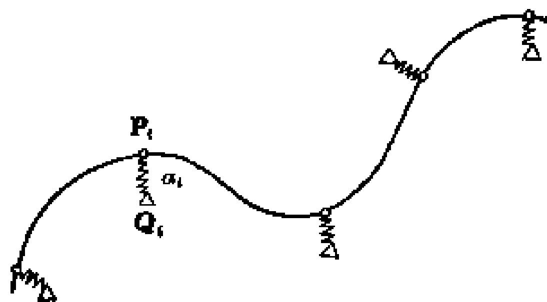


图 3

过 $\{P_i\}$ 的插值弹性线在这里取成累加弦长三次参数样条曲线. 在能量法的整个讨论过程中，总假定拟合曲线是局部小挠度. 因此，在曲线的弧长与曲率的计算上，如前所述，我们要作相应的线性化处理.

按照第三章§6的结果，过 $\{P_i\}$ 的累加弦长三次参数样条曲线在 P_{i-1} 与 P_i 之间的一段（第 i 段）表示式为

$$\boldsymbol{P}(t)=[1,\ (t-t_{i-1}),\ (t-t_{i-1})^2,\ (t-t_{i-1})^3]$$

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{l_i^2} & \frac{3}{l_i^2} & -\frac{2}{l_i} & -\frac{1}{l_i} \\ \frac{2}{l_i^3} & -\frac{2}{l_i^3} & \frac{1}{l_i^2} & \frac{1}{l_i^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{i-1} \\ \boldsymbol{P}_i \\ \boldsymbol{m}_{i-1} \\ \boldsymbol{m}_i \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i,$$

式中 $t_i=\sum\limits_{j=1}^{i}l_j$, $l_j=|\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_{j-1}|$, $\boldsymbol{m}_i=\left.\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\right|_{t=t_i}$, $\boldsymbol{M}_i=\left.\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right|_{t=t_i}$ $(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$. 各个内型值点处的一阶和二阶导向量之间的关系式是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_i&=-\frac{2}{l_i}(3\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{m}_{i-1}-2\boldsymbol{m}_i)\\&=\frac{2}{l_{i+1}}(3\boldsymbol{e}_{i+1}-2\boldsymbol{m}_i-\boldsymbol{m}_{i+1}),\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中弦方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_i=\frac{\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{i-1}}{l_i}$.

关于样条曲线的弧长参数 s 与曲率 k 所作的线性化处理是

$$ds\approx dt,\ k^2=\left(\frac{d^2\boldsymbol{P}}{ds^2}\right)^2\approx\left(\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2.$$

于是,能量函数(2.4)近似表示成

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{Q}_i)^2+\frac{1}{2}(EI)^2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\frac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2dt. \tag{2.7}$$

将(2.5)代入(2.7),能量 U 变成了$\{\boldsymbol{P}_i\}$和$\{\boldsymbol{m}_i\}$的函数. 现在,我们变动$\{\boldsymbol{P}_i\}$与$\{\boldsymbol{m}_i\}$使得 $U=\min$, 便有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{P}_i}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{m}_i}=0\end{cases}\quad (i=0,\ \cdots,\ n). \tag{2.8}$$

注意到(2.5)和(2.6),并利用分部积分,我们容易导得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{P}_{i-1}}\left[\dfrac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2 dt\right]=\dfrac{1}{l_i}(\boldsymbol{M}_i-\boldsymbol{M}_{i-1}), \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{P}_{i}}\left[\dfrac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2 dt\right]=-\dfrac{1}{l_i}(\boldsymbol{M}_i-\boldsymbol{M}_{i-1}), \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{m}_{i-1}}\left[\dfrac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2 dt\right]=-\boldsymbol{M}_{i-1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{m}_{i}}\left[\dfrac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{P}}{dt^2}\right)^2 dt\right]=\boldsymbol{M}_{i}. \end{cases}$$

从而(2.8)化成

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{Q}_i-\beta_i\Delta^2\boldsymbol{M}_i, \\ \boldsymbol{M}_i(-)=\boldsymbol{M}_i(+) \end{cases} \quad (i=1,\ \cdots,\ n-1), \tag{2.9}$$

其中

$$\beta_i=\frac{1}{\alpha_i}(EI)^2,$$

$$\Delta^2 f_i=\frac{f_{i+1}-f_i}{l_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{l_i}.$$

$(2.9)_2$只不过表明了样条的二阶导向量在每个内节点处的连续性. 可是累加弦长三次参数样条是 C^2 连续, 所以这一条件早已满足了. 反过来, 累加弦长三次参数样条的 C^2 连续性是能量 $U=\min$ 的一个推论. 因此, 对样条的 C^2 连续性要求同对它的光顺性要求是密切相关的. 或者讲, 曲线在大范围的光顺性也依赖于小范围的 C^2 连续性.

我们不妨把$(2.9)_2$写成第三章的 M 连续性方程(6.5)形式:

$$\mu_i\boldsymbol{M}_{i-1}+2\boldsymbol{M}_i+\lambda_i\boldsymbol{M}_{i+1}=\frac{6}{l_i+l_{i+1}}\Delta^2\boldsymbol{P}_i \quad (i=1,\ \cdots,\ n-1),$$

再从$(2.9)_1$消去 $\boldsymbol{P}_i$, 我们得到

$$\mu_i\boldsymbol{M}_{i-1}+2\boldsymbol{M}_i+\lambda_i\boldsymbol{M}_{i+1}+\frac{6}{l_i+l_{i+1}}\Delta^2(\beta_i\Delta^2\boldsymbol{M}_i)$$
$$=\frac{6}{l_i+l_{i+1}}\Delta^2\boldsymbol{Q}_i \quad (i=1,\ \cdots,\ n-1). \tag{2.10}$$

添上适当的边界条件后, (2.10)是关于 $\{\boldsymbol{M}_i\}$ 的五对角线代数方程

组. 式中 $\lambda_i=\dfrac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{l_i}{l_i+l_{i+1}}$. 在光顺问题中,型值点的改动量 $|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{Q}_i|$ 与弦长相比总是小量, 因此弦长可近似取成 $l_i=|\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{Q}_{i-1}|$.

计算步骤是: 首先从(2.10)式解出$\{\boldsymbol{M}_i\}$, 然后按照$(2.9)_1$求得光顺型值点$\{\boldsymbol{P}_i\}$, 再从(2.6)求解$\{\boldsymbol{m}_i\}$. 最后, (2.5)式便代表了所要求的光顺拟合曲线.

能量法容易推广到二维网格的光顺问题. 这些将在下一节介绍.

能量法与最小二乘法在目标函数的选择方面有所不同. 前者取木样条的能量, 而后者取剪力跃度平方和. 但是这两种方法的精神却是一致的. 我们将$(2.9)_1$写成

$$|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{Q}_i|=\beta_i|\Delta^2\boldsymbol{M}_i|. \qquad (2.11)$$

等式右端的$|\Delta^2\boldsymbol{M}_i|$就是型值点$\boldsymbol{P}_i$处的剪力跃度,等式左端代表型值点的修改量,两者差一个比例因子β_i. 这就表明,当样条的剪力跃度较小时,无论按照最小二乘法或者按照能量法进行光顺,型值点的偏离都较小.

2.3 回弹法

浙江大学等单位在船体数学放样的实践中提出一种新的光顺方法,叫做"回弹法". 回弹法是手工放样中的"两借借,自然放"的一种数学模拟: 通过新老两组型值点交替地固定和回弹, 使样条的能量渐次减少,以达到光顺的目的(董光昌等, 1978).

当平面上给定一组型值点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, \cdots, n)$ 以及适当的边界条件后,回弹法的计算步骤如下所述:

(1) 对于给定的分割

$$\Delta: \ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

及型值点$\{P_i(x_i, y_i)\}$, 作插值三次样条函数$S(x)$.

(2) 取相邻两个节点的中点

$$\xi_i=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})\quad(i=0,\ \cdots,\ n-1),$$

记 $\xi_{-1}=a$, $\xi_n=b$, 而且作插值 $S(\xi_i)$.

(3) 对于另一分割

$$\Delta^*:\ a=\xi_{-1}<\xi_0<\cdots<\xi_{n-1}<\xi_n=b$$

及型值点 $\{Q_i(\xi_i,\ S(\xi_i))\}(i=-1,0,\cdots,\ n)$, 同样作插值三次样条函数 $S^*(x)$.

(4) 称 $P_i^*(x_i,\ S^*(x_i))\,(i=0,\ \cdots,\ n)$ 为经过一次回弹的新型值点.

(5) 如此重复, 直到某一次回弹前后的节点 x_i 处的函数值之差小于定值 ε 为止:

$$|S^*(x_i)-S(x_i)|<\varepsilon\quad(i=0,\ \cdots,\ n).$$

最后一次获得的型值点及其插值三次样条即作为光顺型值点和光顺曲线. 在船体数学放样中, 一般取 $\varepsilon=3$ 毫米.

当构造插值三次样条函数 $S(x)$ 和 $S^*(x)$ 时, 它们的边界条件在回弹过程中不变, 都是原来给定的.

上面介绍的过程称为插中点回弹法, 是回弹法的基础. 经过改进后, 第(2)步的插节点可以改成加权平均形式

$$\xi_i=\alpha_i x_i+(1-\alpha_i)x_{i+1}\quad(i=0,\ \cdots,\ n-1),$$

其中权因子 $\alpha_i\in(0,\ 1)$, 选择原则是使得 $\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ 与样条 $S(x)$ 在 x_i, x_{i+1} 两节点处的剪力跃度成比例.

直观地看, 经过回弹, 样条的能量逐次减少, 曲线也就趋向光顺. 回弹法可以看成一种迭代逼近的能量法.

回弹法的力学意义明确, 方法简便易行, 光顺质量良好. 但是, 如果迭代次数过多的话, 可能出现光顺型值点与原型值点偏离过大的问题. 而且, 对平直段小波动往往难以消除, 这是整体光顺法的通病.

在吸取了选点修改法的长处后, 回弹法增加了"直尺卡样", 就

是把平直段的坏点挑出来加以局部性处理，以保证曲线的弯曲方向. 它的基本精神与下一段介绍的基样条法很相似.

2.4 基样条法

当运用光顺准则到几何外形的数学放样，比方船体线型的数学放样时，有一个前提需要明确，那就是由设计部门提供的原始型值点，极大多数是好的或比较好的. 一般只要修改少数型值点，便能获得一个光顺的几何外形. 不能想象，在光顺过程当中，有三分之一甚至近半数的型值点需要作较多修改时，这样粗糙的原始数据还有什么实际意义.

基样条法和圆率法都是选点修改法. 选点修改法的基础是，承认极大多数型值点是好的或比较好的. 选点修改法的光顺过程就是把少数"坏点"挑出来逐个予以修正.

选点修改法的优点是：

(1) 坏点挑得准，好点不受损，修改的型值点少；

(2) 严格满足三条光顺准则，圆满解决了平直段小波动问题；

(3) 修改能力强. 有这样的一个实例，对于孤立坏点，错几十米也一次改了回来.

选点修改法的缺点是：当接连出现多个坏点时，往往不容易处理好. 虽然也能光顺，但收敛速度就慢了.

选点修改法之所以特别适用于几何外形的光顺问题，是因为在这类问题中有极大多数的好点. 而在数据拟合问题中，我们因随机误差和系统误差的影响，往往难以明确区分好点和坏点. 对于这类问题，似乎采用整体光顺拟合法为好.

现在开始介绍基样条法.

我们在上一节给出的曲线光顺性定义的三条准则是定性的. 在基样条法中把它们定量化，便变成下列三条：

(1) 对于给定的原始型值点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, \cdots, n)$ 和边界

导数 y'_0, y'_n, 我们按照基样条表示构造插值三次样条函数 $S(x)$, 它是满足 C^2 连续条件的. 从第二章的 1.3 段我们有

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_i(x)+y'_0\varphi_{n+1}(x)+y'_n\varphi_{n+2}(x), \qquad (2.12)$$

式中 $\{\varphi_i(x)\}$ 表示三次基样条函数系.

(2) 计算 $S(x)$ 在每个节点 x_i 处的二阶导数 $M_i=S''(x_i)$, 并作符号序列 $\{\mathrm{sign}(M_i)\}$. 在点列中, 凡使符号序列连续变号的点称为坏点. 光顺的目标是使得符号序列无连续变号. 这一步称为**粗光顺**, 它具有消除多余拐点的功能.

(3) 作二阶导数差分 $\Delta M_i=M_i-M_{i-1}$ 的符号序列 $\{\mathrm{sign}(\Delta M_i)\}$. 在点列中, 凡使差分符号序列连续变号的点称为坏点. 光顺的目标是使得差分符号序列无连续变号. 这一步称为精光顺, 它具有均匀化曲线的曲率变动的功能.

例如, 在序列 $++-+++$ 中, 第四点是坏点. 光顺的办法是修改第四点 (也许修改第三点或第五点), 使得序列符号全为正.

象 $+++-----++$ 这样的符号序列, 是被认为光顺的.

一般地, 设 $P_k(x_k, y_k)$ 是坏点, 而且修改后的点为 $P_k^*(x_k, y_k+\rho_k)$. 我们仅改动第 k 个点 P_k 而保持其余各点不变, 记所得的插值三次样条为 $S^*(x)$, 那末, 成立关系式:

$$S^*(x)=S(x)+\rho_k\varphi_k(x). \qquad (2.13)$$

在基样条法中所希望的是, 修改后的样条 $S^*(x)$ 的剪力跃度 $\{b_i^*\}$ 平方和取极小, 即

$$B^*\equiv\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{*2}=\min. \qquad (2.14)$$

就是说, 我们使新样条 $S^*(x)$ 在各压铁处的回弹力总和取最小值, 以获得最佳的光顺效果.

按照定义, $\quad b_i^*=S^{*'''}(x_i+0)-S^{*'''}(x_i-0).$

现在，用 b_i 与 $\bar{b}_i$ 分别表示原样条 $S(x)$ 与基样条 $\varphi_k(x)$ 在节点 x_i 处的剪力跃度，那末，(2.13) 给出

$$b_i^* = b_i + \rho_k \bar{b}_i. \tag{2.15}$$

光顺性条件 (2.14) 可写成

$$\frac{dB^*}{d\rho_k} = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n-1} (b_i + \rho_k \bar{b}_i) \bar{b}_i = 0.$$

于是解得

$$\rho_k = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} b_i \bar{b}_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \bar{b}_i^2}, \tag{2.16}$$

式中分母表示第 k 个基样条 $\varphi_k(x)$ 在每个内节点 x_i 处的剪力跃度平方和，它是一个仅与节点分割有关的非零常数．分母的非零性将由本章 § 4 所附关于基样条 $\{\varphi_k(x)\}$ 的性质 1 得到保证．

在多数场合，经过对于第 k 点的修正后，便可达到光顺要求．但也存在另外一种可能性，即修改第 $k-1$ 点或第 $k+1$ 点或许会收到更好的光顺效果．因此，我们按照上述方法分别求出相邻三点的修改量 ρ_{k-1}，ρ_k，ρ_{k+1}，再比较相应的三个剪力跃度平方和．取剪力跃度平方和为最小的那一点作为修改点．

光顺的过程就是对挑出的全部坏点逐点进行修改．先进行初光顺，然后，等到型值点序列全部满足光顺条件 (2)，再进行精光顺，使之满足光顺条件 (3)．

在基样条法里，我们采用了样条的剪力跃度平方和作为光顺目标函数，而在能量法里则采用能量作为光顺目标函数．这两种目标函数虽然不同，但是其效果却一致．对此我们可以作如下的一个粗略的分析．

由于修改点 P_k 是一个坏点，同其它点相比，它的剪力跃度 b_k

可能较大. 另一方面, 从第二章中介绍的三次基样条的性质得知: 当节点分布较为均匀时, 基样条 $\varphi_k(x)$ 在 P_k 处的剪力跃度 $\bar{b}_k$ 的绝对值取最大值, 而且当 P_i 点远离 P_k 点时, P_i 处的剪力跃度 $\bar{b}_i$ 大致以 $\lambda^{|i-k|}$ 速度衰减, 这里 $\lambda=-0.268$. 因此, 按照(2.16)式得出基样条法的近似修改量

$$\rho_k \approx -\frac{1}{\bar{b}_k} b_k.$$

另一方面, 按照 (2.11) 式得出能量法的修改量同该点的剪力跃度成正比的事实, 其中比例因子 β_k 相当于基样条法修改量的常因子 $-\frac{1}{\bar{b}_k}$. 两种方法不相同之处在于: 一个是整体修改, 另一个是选点修改.

自从苏步青和忻元龙于 1974 年提出基样条法以来, 在江南造船厂多次实用于船体数学放样, 收到了良好的光顺效果. 这里介绍的是单根曲线光顺法. 关于船体曲面的三向光顺, 则采用"曲线检查、曲面修改"方法, 将在下一节介绍. 基样条法也被应用于艏艉部的三向光顺而收效, 这里不多叙述了(复旦大学数学系、江南造船厂[1] [2] [3], 1974).

2.5 圆 率 法

圆率法也是一种选点修改法. 它不需要插值曲线, 而从离散型值点分布的几何位置出发直接判断型值点列的光顺性, 进而挑出坏点给以光顺修改, 这就是特点. 如同能量法一样, 我们在数学处理过程中不必引进坐标系, 因此不存在大挠度问题.

在平面上给定了型值点列 $\boldsymbol{P}_i(i=0, \cdots, n)$ 和两边界切向 $\boldsymbol{m}_0$, $\boldsymbol{m}_n$, 过相邻三点 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 所作圆的相对曲率 K_i 称为在点 $\boldsymbol{P}_i$ 处的圆率. 当圆弧 $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}$ 走向为逆时针时, K_i 取正号, 顺时针时则取负号. 边界点 P_0 处的圆率 K_0 则以过两点 P_0、P_1 和 P_0 处的切向 $\boldsymbol{m}_0$ 所作的圆来确定. K_n 亦然. 这样, 我们便得到

对应于型值点列$\{P_i\}$的圆率序列$\{K_i\}$.

同基样条法一样，圆率法也可分成初光顺和精光顺两部分. 不同之处在于：前法中用的是二阶导数 M_i，而后法中是圆率 K_i.

(1) 初光顺.

在符号序列$\{\mathrm{sign}(K_i)\}$中，凡使连续变号的点为坏点. 初光顺的目标是要达到圆率符号序列无连续变号.

(2) 精光顺.

在圆率差分 $\Delta K_i=K_i-K_{i-1}$ 的符号序列 $\{\mathrm{sign}(\Delta K_i)\}$ 中，凡使连续变号的点为坏点. 精光顺的目标是要达到圆率差分符号序列无连续变号.

基样条法采用了剪力跃度平方和变成最小作为光顺目标. 圆率法则采用圆率的二次差变成最小作为光顺目标.

定义　P_i 点处圆率的二次差是

$$D_i=\lambda_i K_{i-1}+\mu_i K_{i+1}-K_i \quad (i=1, \cdots, n-1), \qquad (2.17)$$

式中 $\lambda_i=\dfrac{l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}$, $\mu_i=\dfrac{l_i}{l_i+l_{i+1}}$, $l_i=\overline{P_{i-1}P_i}$.

假定 P_i 是初光顺中的坏点，那末圆率 K_{i-1} 与 K_{i+1} 为同号，而与 K_i 为异号. 因此 $|D_i|$ 较大. 这样，圆率的二次差的绝对值 $|D_i|$ 是能相对地反映出 P_i 点邻近的光顺程度的.

将坏点 P_i 修改成光顺点 P_i^* 的办法如下：假定在原型值点列中仅用 P_i^* 替代 P_i，而保持其余各点不变. 记新型值点列的圆率序列为 $\{K_i^*\}$. 我们修改的原则是使得 $\{K_i^*\}$ 在 P_i^* 处圆率的二次差

$$D_i^*=0. \qquad (2.18)$$

这样做的本意是使修改后的圆率序列尽量变得均匀些. 事实上，(2.17)式可改写成

$$D_i=\frac{l_i l_{i+1}}{l_i+l_{i+1}}\left(\frac{K_{i+1}-K_i}{l_{i+1}}-\frac{K_i-K_{i-1}}{l_i}\right),$$

$D_i=0$ 意味着，在三点 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 处的圆率差分与所对弦长成比例.

我们应用圆率法到船体数学放样时，型值点以及修改量都取直角坐标系表示．假定坏点 $P_i(x_i, y_i)$ 修改成 $P_i^*(x_i, y_i+\rho_i)$，在作了线性化近似处理后，从(2.18)式得出

$$\rho_i=-\frac{l_il_{i+1}}{g_i}D_i, \tag{2.19}$$

式中 D_i 是原型值点列在 P_i 处圆率的二次差，系数

$$g_i=2\left(\sin\psi_i+\frac{l_{i+1}}{l_{i-1}+l_i}\lambda_i\sin\psi_{i-1}+\frac{l_i}{l_{i+1}+l_{i+2}}\mu_i\sin\psi_{i+1}\right) \tag{2.20}$$

是一个与 P_i 点纵坐标 y_i 无关的量，而且 $g_i>0$ (参见图 4)．在小挠度和型值点等距分布的场合，

$$g_i\approx 3.$$

这里推导从略.

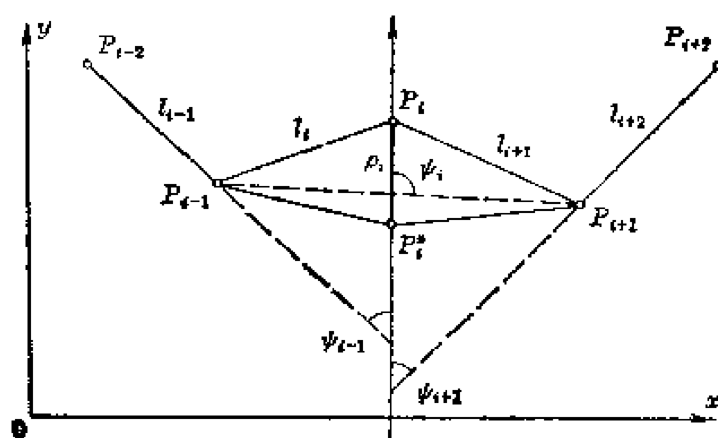


图 4

如果我们想把圆率法应用到几何外形设计，比如在第四章 3.3 中讨论过的三次 B 样条曲线的光顺性，那末只要把三次 B 样条的特征多边形顶点序列当作型值点列进行光顺就可以了，上述的一套方法全部可以照搬过来.

圆率法同前面所述几个方法的光顺精神是一致的．现在，我

们在型值点等距分布的条件下对这种一致性作出定性的说明.

为了同前面几种方法建立联系并作出比较，我们需要在离散的型值点列上建立插值样条. 我们不妨构作线性化局部三次样条曲线. 按照第六章(2.10)式,在等距时的样条连续性方程是

$$K_i=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}k_{i-1}+2k_i+\frac{1}{2}k_{i+1}\right)\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1),\quad(2.21)$$

式中，k_i 是样条在型值点 P_i 处的曲率. 在局部小挠度假定下，样条在型值点 P_i 处的剪力跃度是

$$b_i=\frac{k_{i+1}-k_i}{l_{i+1}}-\frac{k_i-k_{i-1}}{l_i}.$$

在等距时,所有的弦长 $l_i=l$. 于是剪力跃度与圆率二次差依次是

$$\begin{cases}b_i=\dfrac{1}{l}(k_{i-1}+k_{i+1}-2k_i),\\ D_i=\dfrac{1}{2}(K_{i-1}+K_{i+1}-2K_i)\end{cases}\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1).\quad(2.22)$$

联合(2.21)和(2.22),便有

$$D_i=\frac{l}{6}\left(\frac{1}{2}b_{i-1}+2b_i+\frac{1}{2}b_{i+1}\right)\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1).\quad(2.23)$$

记 $b=\max\limits_i|b_i|$, $D=\max\limits_i|D_i|$. 从方程(2.23)容易得到估计式

$$|D_i|\leqslant\frac{l}{2}b,\ |b_i|\leqslant\frac{6}{l}D,$$

即

$$\frac{2}{l}D\leqslant b\leqslant\frac{6}{l}D.$$

经过上述分析便可明了，圆率法的实质在于：通过对圆率二次差 D 的减少而起到减少剪力跃度 b 的作用，从而它具有光顺曲线的功能.

在圆率法中，我们并不希望在每一点都按照(2.18)或其坐标表示(2.19)进行光顺性修改. 因为点点修改的效果不好，会造成改动点子过多，偏离过大的恶果. 我们只要在坏点处进行修改：首

先进行初光顺，之后再精光顺一遍.

必须指出，在初光顺阶段，即使假定型值点列为凸的那一段，即相邻三个圆率 K_{i-1}, K_i, K_{i+1} 为同号，也不能完全保证线性化局部三次样条在对应的型值点曲率 k_{i-1}, k_i, k_{i+1} 为同号. 这从第六章§7关于保凸性的讨论便可明了. 因此，在无拐段，即圆率同号段，必须按照第六章(7.10)式表示的保凸性条件

$$K_i > \frac{1}{2}(\mu_i K_{i-1} + \lambda_i K_{i+1})$$

进行检查，凡不满足上式的 P_i 点也应该作为坏点光顺一遍，以保证经过初光顺之后的插值样条无多余拐点.

为了说明圆率法有很强的光顺功能，这里举一个实例. 这个例子是我们在沪东造船厂的一条25000吨散装货轮的数学放样过程中偶然遇到的，但很能说明问题. 该货轮有一条已经过光顺的7200# 水线，由于数据准备工作中的差错将水线上倒数第三点的半宽2.65误读成方框中的数值974.13，误差将近一千米. 原型值的 x, y 坐标如下表所示(以米为单位). 圆率的单位是1/千米.

x (站距)	y (半宽)	圆率	光顺后圆率
43.00	11.60	−2.16	−2.16
51.60	11.52	−7.54	−7.54
60.20	10.88	−16.16	−16.16
68.80	9.00	−15.86	−15.86
73.10	7.57	−8.15	−8.15
77.40	5.96	−1.76	−1.76
81.70	4.31	1.93	−0.43
86.00	974.13	−1.92	1.04
88.15	1.83	1.92	1.79
90.30	1.02	1.92	1.92

经圆率法光顺一次后，仅改动一个点，就是把方框中的974.13修改成2.649997，与原来的数据2.65相差甚微．其余各点数据全部保持不变．光顺后的圆率仅有三处变动，标明于上表最后一列的方框处．很明显，光顺后圆率序列的变化是均匀的．

从1974年起，山东大学和沪东造船厂协作，在船体数学放样的实践中首次提出了圆率光顺的概念，并试用于船体舯部线型的三向光顺（沪东造船厂、山东大学[1]1976，[3]1978）．之后，作者之一与沪东造船厂的同志在此基础上作了改进．改进的要点是：

(1) 提出了不等距型值点的圆率二次差定义(2.17)式．

(2) 光顺目标简化成(2.18)式，并增加了线性化处理，使得型值点修改量简化成为(2.19)表示的显格式．

(3) 增加了艏部和艉部的三向光顺程序．

这样，我们缩短了计算时间，提高了光顺质量（刘鼎元，苏文荣[2]，1979）．

目前用于沪东造船厂船体生产数控系统上的三向光顺程序是将舯部和艏艉部一起按照圆率法进行光顺．据近年来光顺后投产的五条五千吨级到一万吨级船只的统计，在每秒运算十万次的719数字计算机上，三向光顺半条船（包括艏部或艉部）的时间大致在20～30分钟之间．数据准备和控制台操作也十分简便，人工干预很少．

图5和图6是已经在沪东造船厂投产的球鼻艏型船的肋骨线型图．该线型使用本段介绍的圆率法光顺，采用线性化的局部三次样条曲线作大挠度插值，在沪东造船厂的数控绘图机上按照第六章§4介绍的双圆弧法画图．

2.6 磨光法

吉林大学等单位的外形设计小组提出一种强调保凸（保形）性质的数据拟合法，叫做磨光法（齐东旭等，1975；李岳生，齐东

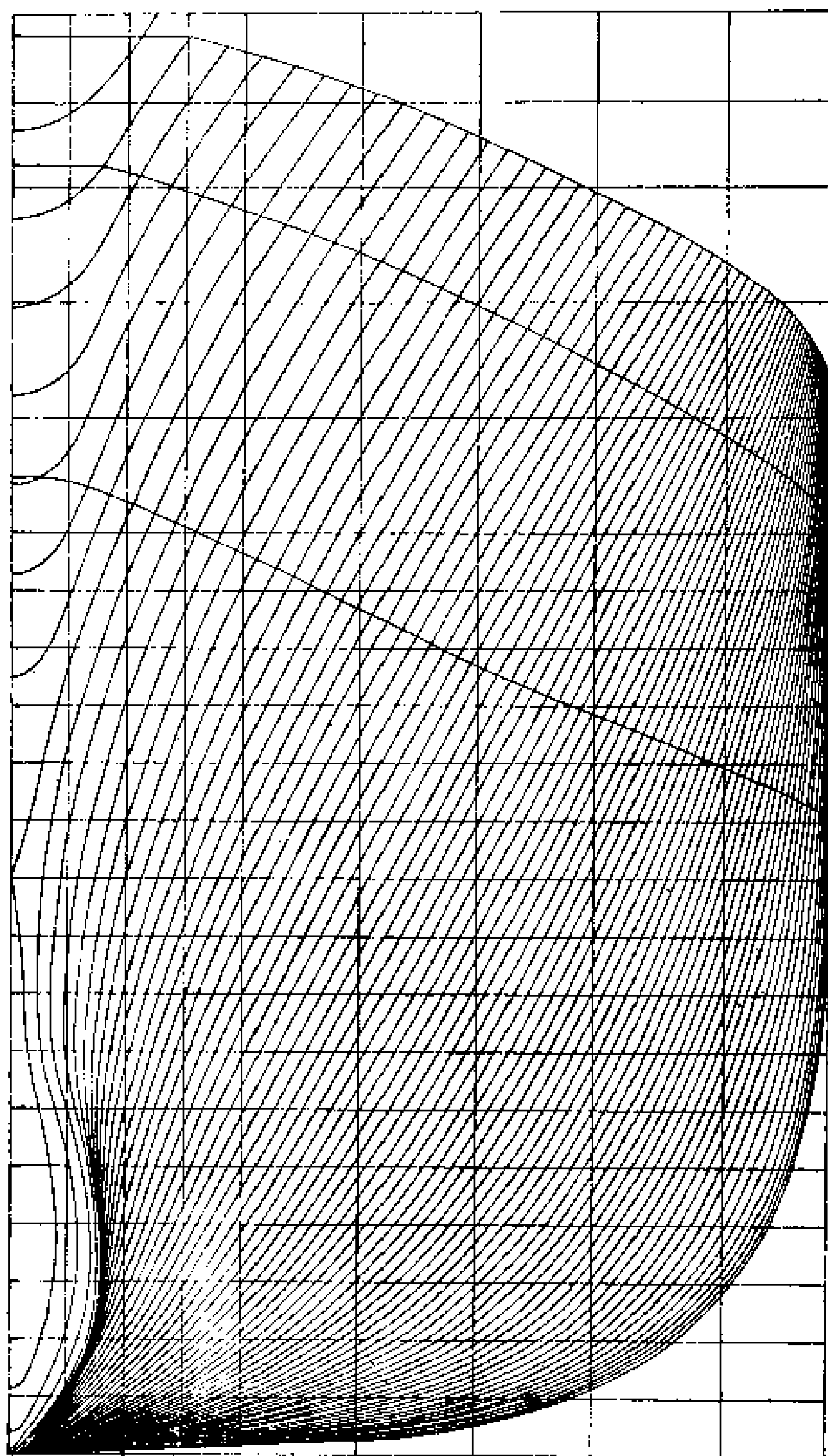


图 5

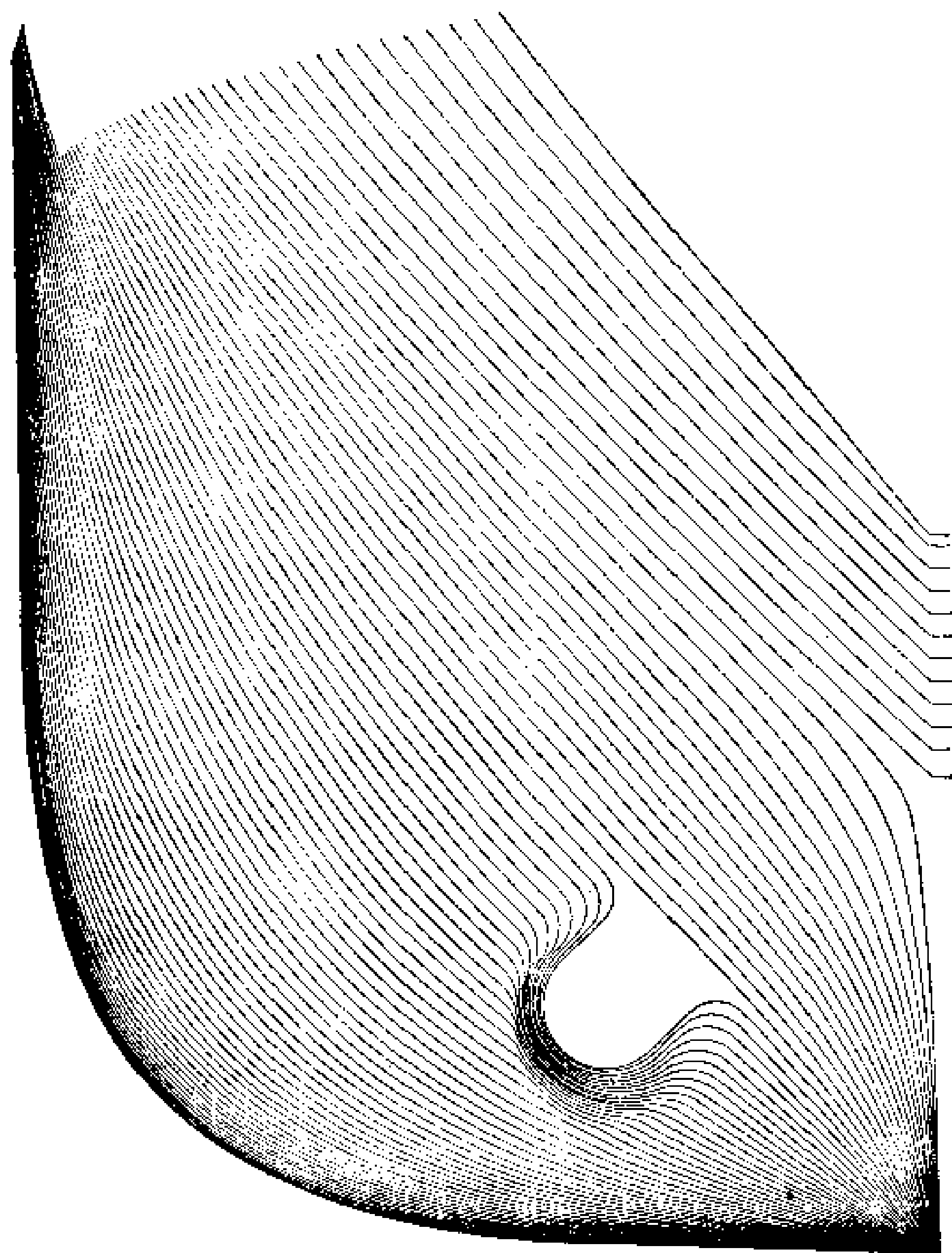


图 6

旭, 1979).

磨光法包括"磨光"和"盈亏修正"两部分内容. 这里仅仅介绍等距节点的磨光法.

设在区间$[a, b]$上给定了间隔为h的等距分割

$$\Delta: \ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

和$n+1$个型值点$P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$. 用线段连接每相邻

两个型值点而得到折线函数 L. 称 k 次样条函数

$$S_k(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i M_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \tag{2.24}$$

为折线函数 L 的 $k-1$ 次磨光函数，其中 $M_k(x)$ 是第二章所介绍的 k 次 B 样条函数(为叙述简单,这里省略了边界条件). 当 $k=1$ 时,便是折线函数 L. 实用上经常取 $k=2$, 3. 国外文献称(2.24)为 $k+1$ 阶样条 VD 逼近. VD 是 Variation Diminishing——“变差缩减”的缩写，意思是说：k 次样条函数 $S_k(x)$ 的拐点个数不会超过折线函数 L 的凹凸转向次数. 当 $k=2$, 3 时, $S_k(x)$的拐点个数正好等于 L 的转向次数，因而具备几何外形设计所需要的保凸(保形)性质. 因此，一次磨光($k=2$)便是二次 B 样条函数 VD 逼近,二次磨光($k=3$)便是三次 B 样条函数 VD 逼近.

一次和二次磨光函数还容易推广成参数形式，就是第四章介绍的二次和三次 B 样条曲线. 折线函数 L 则成为相应的 B 特征多边形.

一般说来,形如(2.24)的样条逼近阶仅有 $O(h^2)$，而插值三次样条的逼近阶是 $O(h^4)$. 然而前者具备保凸性，后者却未必. 这说明：用(2.24)表示的 VD 样条逼近,是通过降低对逼近阶的要求而代之以保凸性.

更遗憾的是,由于 VD 逼近不满足插值条件,在每个内节点 x_i 处出现偏离值

$$\rho_i=S(x_i)-y_i=\begin{cases}\frac{1}{8}\Delta^2 y_i & k=2,\\[2ex] \frac{1}{6}\Delta^2 y_i & k=3,\end{cases}$$

其中 $\Delta^2 y$ 表示型值$\{y_i\}$的二次差分：

$$\Delta^2 y_i=y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}.$$

对于几何外形的数学放样说来，这种偏离值 ρ_i 未免太大了.

为了减少型值点的偏离，磨光法采用一种叫做"盈亏修正"的补救办法．也就是在每个内节点 x_i 处，事先给原型值 y_i 以一个补偿量 $-\rho_i$，再按照新型值

$$y_i^* = y_i - \rho_i$$

构造磨光函数(2.24)，记成 $S_k^*(x)$．这个过程称为经过一次盈亏修正．容易算出，经过一次修正后的型值偏离

$$\rho_i^* = S_k^*(x_i) - y_i = \begin{cases} -\frac{1}{64}\Delta^4 y_i & k=2, \\ -\frac{1}{36}\Delta^4 y_i & k=3, \end{cases}$$

其中 $\Delta^4 y_i$ 表示型值$\{y_i\}$的四次差分．从上式看出，一般说来，经过盈亏修正后的磨光函数将更接近原型值点．

必要时，我们可以重复上述步骤，进行多次盈亏修正．已经证明，当修正次数 $n\to\infty$ 时，对应的磨光函数

$$S_k^{[n]}(x) \to f_k(x) \quad (k=2,\ 3),$$

这里 $f_k(x)$ 是满足插值条件

$$f_k(x_i) = y_i \quad (i=0,\ \cdots,\ n),$$

且形如

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i M_k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

的 k 次样条函数．事实上，$f_k(x)$ 是省略了边界条件的插值 k 次样条函数，它必定存在而且是唯一的．这就表明，经过足够多次盈亏修正后，磨光函数逼近于插值函数 $f_k(x)$ $(k=2,\ 3)$．

然而，修正次数并非越多越好．根据第二章§3中讨论的二次和三次插值样条函数的保凸性条件，假定型值点列为凸，而保凸的充要条件(3.15)或(3.16)不成立的话，插值样条一定是不保凸的．

实际应用盈亏修正的步骤是：每修正一次，检查一次节点处二阶导数 $S''(x_i)$ 的符号与型值二次差 $\Delta^2 y_i$ 的符号是否相同．如

果相同,则继续修正. 否则,回到前一次并中止计算. 这是在保凸的前提下尽量地逼近型值的一种技术性措施.

必须指出,当原型值不满足初光顺条件,比如相邻三个型值的二次差分 $\Delta^2 y_{i-1}$, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 y_{i+1}$ 的符号是 +, −, +时, 不管取几次盈亏修正,磨光函数在 P_i 点邻近总有两个多余拐点. 这是因为磨光函数在"保形"方面过于求全而缺少"平滑"能力的缘故. 也就是说,磨光法不具备初光顺的功能. 在这种场合,磨光法的作者也认为需要借助于其它光顺方法预先对型值点进行初光顺. 此外,磨光法对于精光顺的目标也是缺少考虑.

综上所述,不附加盈亏修正的 $k-1$ 次磨光函数就是 k 次 B 样条函数, 参数形式的 $k-1$ 次磨光曲线则是 k 次 B 样条曲线. 附加盈亏修正的磨光函数能减少同原型值的偏离, 又保持原型值的凸性,适用于要求保凸的数据拟合问题.

§3 网格的光顺

我们在前节介绍了单根曲线的几种光顺方法, 这些都是网格光顺的基础.

在船体数学放样中,最终希望获得一张由横剖线、水线和直剖线所张成的光顺网格. 所谓网格是光顺的, 其含义是指网格的每一条曲线都光顺. 当最小二乘法、回弹法和圆率法应用于网格光顺时,只是模拟传统的手工放样,把上述三族剖面线各自独立地进行光顺,但要满足网格的协调条件,即分属于两族的每两条曲线在空间是相交的, 不允许出现间隙. 这个过程称为三向光顺. 为了满足协调条件, 就需要对三族剖面线反复多次地迭代光顺. 就圆率法而言,不排斥存在这种可能性: 在个别型值点处,为了保证协调条件的成立而不得不放弃精光顺的要求. 但是,无论如何,必须达到初光顺.

能量法和基样条法在网格光顺方面有一套独特的方法，不同于上述意义下的三向光顺．它们是能量法和基样条法从一维推广到二维的结果．

3.1 网格能量法

这是穗坂衛的能量法在二维场合的拓广（Hosaka[3]，1969）．

取一个由两族刚度都是 EI 的弹性线 $C_i(i=0, \cdots, n)$ 与 $D_j(j=0, \cdots, m)$ 所张成的网格．除了在线的交叉点即型值点处有相同的位移之外，对它们没有任何别的约束．这两族线分别带有 u 参数和 v 参数．请读者对照 2.2 段阅看下列记号：

$\boldsymbol{Q}_{ij}$ 网格原型值点，

$\boldsymbol{P}_{ij}$ 网格光顺型值点，

α_{ij} 型值点弹簧的弹性系数，

$\boldsymbol{M}_{ij}^u$ 网格在 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 处 u 方向上的二阶导向量，

$\boldsymbol{M}_{ij}^v$ 网格在 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 处 v 方向上的二阶导向量，

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\boldsymbol{M}_{ij}^u+\boldsymbol{M}_{ij}^v,$$

$$\beta_{ij}=\frac{(EI)^2}{\alpha_{ij}},$$

$$l_{ij}^u=|\boldsymbol{P}_{ij}-\boldsymbol{P}_{i-1,j}|,$$

$$l_{ij}^v=|\boldsymbol{P}_{ij}-\boldsymbol{P}_{i,j-1}|.$$

算子 Δ_u^2 和 Δ_v^2 的作用是

$$\Delta_u^2 f_{ij}=\frac{f_{i+1,j}-f_{ij}}{l_{i+1,j}^u}-\frac{f_{ij}-f_{i-1,j}}{l_{ij}^u},$$

$$\Delta_v^2 f_{ij}=\frac{f_{i,j+1}-f_{ij}}{l_{i,j+1}^v}-\frac{f_{ij}-f_{i,j-1}}{l_{ij}^v}.$$

包括两族弹性线和小弹簧在内的整个系统的内能是

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\boldsymbol{P}_{ij}-\boldsymbol{Q}_{ij})^2+\frac{1}{2}(EI)^2\Big(\sum_i\int_{C_i}k^2ds+\sum_j\int_{D_j}k^2ds\Big).$$

同 2.2 段的讨论相类似地经过线性化处理，我们按照

$$U=\min,$$

便能推出下列关于 $\boldsymbol{P}_{ij}$, $\boldsymbol{M}_{ij}^u$, $\boldsymbol{M}_{ij}^v$ 的方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{Q}_{ij}-\beta_{ij}(\Delta_u^2\boldsymbol{M}_{ij}^u+\Delta_v^2\boldsymbol{M}_{ij}^v),\\ l_{ij}^u\boldsymbol{M}_{i-1,j}^u+2(l_{ij}^u+l_{i+1,j}^u)\boldsymbol{M}_{ij}^u+l_{i+1,j}^u\boldsymbol{M}_{i+1,j}^u\\ \quad+6\Delta_u^2(\beta_{ij}\Delta_u^2\boldsymbol{M}_{ij}^u)=6\Delta_u^2\boldsymbol{Q}_{ij},\\ l_{ij}^v\boldsymbol{M}_{i,j-1}^v+2(l_{ij}^v+l_{i,j+1}^v)\boldsymbol{M}_{ij}^v+l_{i,j+1}^v\boldsymbol{M}_{i,j+1}^v\\ \quad+6\Delta_v^2(\beta_{ij}\Delta_v^2\boldsymbol{M}_{ij}^v)=6\Delta_v^2\boldsymbol{Q}_{ij}.\end{cases}\tag{3.1}$$

先从后两个方程算出 $\boldsymbol{M}_{ij}^u$ 与 $\boldsymbol{M}_{ij}^v$, 然后从第一个方程求得网格光顺型值点 $\boldsymbol{P}_{ij}$.

穗坂衡的网格模型比弹性板模型优越. 因为后者存在双参数的交叉影响,方程中出现二阶混合偏导数,相当于 Coons 曲面中的扭矢. 与此相反,穗坂衡采用的 u 弹性线与 v 弹性线除了在型值点处位移相同这个网格协调条件外,是完全独立的,它恰恰相当于一种零扭矢的网格. 因而网格方程 (3.1) 只是两个一维方程的简单联合,处理较为简便.

3.2 网格基样条法

忻元龙将双三次样条函数的基样条表示应用到网格光顺中去,提出一种"曲线检查、曲面修改"的新方案,修改点和修改量均由光顺性条件确定. 这种光顺方案在江南造船厂的船体数学放样中收到了成效(忻元龙[2], 1977).

网格基样条法就是前节 2.4 段介绍的光顺单根曲线的基样条法在二维场合的拓广.

在基样条法中,如果定义一元样条函数的节点剪力跃度向量

$$\boldsymbol{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1}),$$

光顺目标函数就是使剪力跃度平方和变成极小:

$$B\equiv\boldsymbol{B}^2=\sum_{i=1}^{n-1}b_i^2=\min.$$

这些概念都可以相应地推广到网格基样条法.

设在平面矩形域 R: $[a, b]\otimes[c, d]$ 上给定一个矩形分割 $\Delta=\Delta_x\otimes\Delta_y$, 其中

$$\Delta_x:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$\Delta_y:\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$

定义在分割 Δ 上的双三次样条函数 $f(x, y)$ 的全体构成 $(m+3)(n+3)$ 维线性空间 $S(x, y; \Delta)$, 它的基是

$$\{\varphi_s(x)\psi_t(y)\}\quad (s=0, \cdots, n+2;\ t=0, \cdots, m+2),$$

称为二元基样条, 是在 x 方向上和 y 方向上的两个一元基样条 $\{\varphi_s(x)\}$ 和 $\{\psi_t(y)\}$ 的直积. 其中只有 $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$ 和 $\psi_{m+1}(y)$, $\psi_{m+2}(y)$ 与边界条件有关. 以上这些内容已经在第五章的1.2段叙述过了.

一元样条的内节点剪力跃度 b_i 在二元场合的拓广是

$$\begin{cases} \Delta_{x_i}^{(\alpha)}f\equiv\left.\dfrac{\partial^{(3+\alpha)}f}{\partial y^\alpha\partial x^3}\right|_{x_i+0}-\left.\dfrac{\partial^{(3+\alpha)}f}{\partial y^\alpha\partial x^3}\right|_{x_i-0} & (i=1, \cdots, n-1), \\ \Delta_{y_j}^{(\alpha)}f\equiv\left.\dfrac{\partial^{(3+\alpha)}f}{\partial x^\alpha\partial y^3}\right|_{y_j+0}-\left.\dfrac{\partial^{(3+\alpha)}f}{\partial x^\alpha\partial y^3}\right|_{y_j-0} & (j=1, \cdots, m-1), \\ \qquad\qquad (\alpha=0, \cdots, 3). \end{cases}\tag{3.2}$$

一元的跃度向量 $\boldsymbol{B}$ 在二元的拓广是一个 $8(mn-1)$ 维跃度向量:

$$\boldsymbol{G}(f)=(\boldsymbol{G}_x^{(0)}(f),\ \boldsymbol{G}_x^{(1)}(f),\ \boldsymbol{G}_x^{(2)}(f),\ \boldsymbol{G}_x^{(3)}(f),$$
$$\boldsymbol{G}_y^{(0)}(f),\ \boldsymbol{G}_y^{(1)}(f),\ \boldsymbol{G}_y^{(2)}(f),\ \boldsymbol{G}_y^{(3)}(f)),$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_x^{(\alpha)}(f)=(\Delta_{x_1}^{(\alpha)}f|_{y_0},\ \cdots,\ \Delta_{x_{n-1}}^{(\alpha)}f|_{y_0},\ \cdots, \\ \quad \Delta_{x_1}^{(\alpha)}f|_{y_m},\ \cdots,\ \Delta_{x_{n-1}}^{(\alpha)}|_{y_m}), \\ \boldsymbol{G}_y^{(\alpha)}(f)=(\Delta_{y_1}^{(\alpha)}f|_{x_0},\ \cdots,\ \Delta_{y_{m-1}}^{(\alpha)}f|_{x_0},\ \cdots, \\ \quad \Delta_{y_1}^{(\alpha)}f|_{x_n},\ \cdots,\ \Delta_{y_{m-1}}^{(\alpha)}|_{x_n}) \end{cases}\quad (\alpha=0, \cdots, 3).$$

我们把曲面的光顺性理解为它的两族网格线的光顺性. 在进行网格光顺时, 首先按照2.4的曲线光顺准则检查每条网格线, 从

中定出坏点所在集合 E, 然后从 E 中确定修改点 P_0. 计算修改量的方法如下所述.

假定在分割 Δ 上已经给定原型值 $\{z_{ij}\}$ 和适当的边界条件, 我们首先作插值双三次样条函数 $f(x, y)$. 设 $C_P(x, y)$ 代表与任一坏点 $P\in E$ 有关的二元基样条. 如果 ρ_P 是在 P 点增加的型值增量,而在其余各点的型值和边界条件都保持不变,那末修改后的插值双三次样条函数 $f^*(x, y)$ 满足关系

$$f^*(x, y)=f(x, y)+\rho_P C_P(x, y).$$

修改量 ρ_P 决定于目标函数的极小化:

$$G_P\equiv \boldsymbol{G}^2(f^*)=\min. \tag{3.3}$$

其次,注意到$\{\Delta_{x_i}^{(\alpha)}\}$和$\{\Delta_{y_j}^{(\alpha)}\}$都是线性算子,因而算子

$$\boldsymbol{G}:\ f\to \boldsymbol{G}(f)$$

也是线性的,即:

$$\boldsymbol{G}(f^*)=\boldsymbol{G}(f)+\rho_P\boldsymbol{G}(C_P). \tag{3.4}$$

联合(3.3)和(3.4),便求得 P 点修改量

$$\rho_P=-\frac{\boldsymbol{G}(f)\cdot\boldsymbol{G}(C_P)}{\boldsymbol{G}^2(C_P)}.$$

从下一节关于二元基样条的性质 3 知道,上式的分母 $\boldsymbol{G}^2(C_P)>0$, 因此 ρ_P 总是有意义的.

最后我们求出

$$G_{P_0}=\min_{P\in E} G_P,$$

我们取定 E 中的 P_0 点作为修改点,并采用相应的修改量 ρ_{P_0} 进行修改.

总之, 曲面光顺的过程就是反复检查、反复修改的过程, 也就是使曲面的跃度平方总和 $G=\boldsymbol{G}^2(f)$ 逐步变小的过程. 当 $G\to 0$ 时, 双三次样条函数 $f(x, y)$ 就从分片双三次向整块双三次转化. 但是我们并不要求光顺后的 $G\approx 0$, 因为这样做会出现修改点过多, 修改量过大的缺点. 只要所有网格曲线满足光顺准则, 这个过

程就告结束.

对非矩形域上的矩形网格线的情况，我们也可用类似的方法进行光顺,不过先要光顺边界线,然后光顺内部. 具体细节这里就不赘述了.

§4 光顺性边界条件的确定

在一组型值点$\{P_i(x_i, y_i)\}$给定以后，我们还要附加两个适当的边界条件，比方说首末两端的一阶导数y'_0和y'_n，才能构造唯一的插值三次样条函数. 然而,在相当一些几何外形计算问题中,事先并没有给出边界条件. 所以需要在算法中予以确定. 所谓"适当的"边界条件，意思是指边界条件同型值点列要和顺地协调起来，使得整个样条比较光顺. 有好几种简单地确定边界导数的方法值得一提. 比如：过P_0、P_1、P_2三点作正抛物线，把P_0处的一阶导数y'_0取为首端边界条件，称它为抛物端边界. 这也相当于前章8.1中介绍的Bessel方法.

忻元龙([2]，1977) 给出了一种决定光顺性边界条件的算法，而且证明了解的唯一存在性. 光顺性的含义是使样条的剪力跃度平方和变为极小,就象我们在基样条光顺法中已经做过的那样.借助的工具仍然是三次基样条. 对于一元和二元两种情况将分别予以介绍. 对其中所用到的三次基样条的一些性质，将在4.3段中一起给以证明.

至于决定一元和二元光顺性边界条件的算法，分别与基样条光顺法和网格基样条光顺法配套使用，在江南造船厂的船体数学放样生产线上已经应用多年,收到良好的效果.

4.1 一元样条的光顺性边界条件

在平面上给定了一组型值点列$P_i(x_i, y_i)$ $(i=0, \cdots, n)$，设待

定的边界条件是 y'_0 和 y'_n. 插值三次样条函数的基样条表示式为

$$S(x)=\Phi(x)+y'_0\varphi_{n+1}(x)+y'_n\varphi_{n+2}(x), \tag{4.1}$$

其中,和边界条件无关的部分是

$$\Phi(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\varphi_i(x),$$

而且 $\varphi_s(x)$ $(s=0,\ \cdots,\ n+2)$ 是三次基样条函数.

我们这样决定 y'_0 和 y'_n, 使得 $S(x)$ 在内节点 x_i 处的剪力跃度 b_i 的平方和变成极小:

$$B\equiv\sum_{i=1}^{n-1}b_i^2=\min, \tag{4.2}$$

其中 $\quad b_i=S'''(x_i+0)-S'''(x_i-0)\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1)$.

样条 $\Phi(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$; $\varphi_{n+2}(x)$ 在内节点 x_i 处的剪力跃度依次记成 c_i, d_i, d_i^* $(i=1,\ \cdots,\ n-1)$. 从(4.1)便有

$$b_i=c_i+y'_0d_i+y'_nd_i^*\quad(i=1,\ \cdots,\ n-1).$$

因而

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B}{\partial y'_0}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+y'_0d_i+y'_nd_i^*)d_i,\\[2ex]\dfrac{\partial B}{\partial y'_n}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(c_i+y'_0d_i+y'_nd_i^*)d_i^*.\end{cases}$$

为使 $B=\min$, 必须有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B}{\partial y'_0}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial B}{\partial y'_n}=0,\end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases}y'_0d+y'_ne=-c,\\ y'_0e+y'_nd^*=-c^*,\end{cases} \tag{4.3}$$

式中

$$\begin{cases}d=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2,\ e=\sum_{i=1}^{n-1}d_id_i^*,\ d^*=\sum_{i=1}^{n-1}d_i^{*2},\\[2ex] c=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}c_id_i,\ c^*=\sum_{i=1}^{n-1}c_id_i^*.\end{cases}$$

从方程(4.3)解得光顺性边界条件:

$$\begin{cases} y_0' = \dfrac{c^* e - c d^*}{d d^* - e^2}, \\ y_n' = \dfrac{c e - c^* d}{d d^* - e^2}. \end{cases} \tag{4.4}$$

在首端斜率 y_0' 已知而末端斜率 y_n' 待定的场合，我们按照光顺性条件(4.2)求得

$$y_n' = -\frac{y_0' e + c^*}{d^*}. \tag{4.5}$$

在 y_n' 已知而 y_0' 待定的场合，我们同样得到

$$y_0' = -\frac{y_n' e + c}{d}. \tag{4.6}$$

根据下述的 4.3 段的性质 1 和 2 得知: d^*, $d \neq 0$; 当 $n \geqslant 3$ 时, $\{d_i\}$ 与 $\{d_i^*\}$ 线性独立. 又利用 Cauchy 不等式，我们立即得到

$$e^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i d_i^*\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^{*2}\right) = d d^*.$$

因此(4.4), (4.5), (4.6)三式的分母全部非零.

4.2 二元样条的光顺性边界条件

当我们运用双三次样条函数，借以插值一组被给定在矩形分割节点 $\{(x_i, y_j)\}$ 上的型值 $\{z_{ij}\}$ 时，往往缺少全部或者部分边界条件. 在这样的场合，我们将按照光顺性条件予以确定. 所用记号与本章 3.2 段相同.

设 $f(x, y) \in S(x, y; \Delta)$，它的基样条形式是

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha c_\alpha(x, y), \tag{4.7}$$

其中 $f_0(x, y) \in S(x, y; \Delta)$ 决定于已知数据. $c_\alpha(x, y)$ 是由 $\{\varphi_s(x)\}$ 和 $\{\psi_t(y)\}$ 所组成，而且与缺少的边界条件有关的基样条, $\{a_\alpha\}$ 为待定系数. 一般地 $p \leqslant 2(m+n)+8$.

用以确定$\{a_\alpha\}$的光顺性条件仍是

$$G^2(f)=\min. \tag{4.8}$$

我们将证明：设$n,m\geqslant 3$，如果光顺性条件(4.8)成立，那末(4.7)中的各系数a_α是唯一存在的．

实际上，从(4.7)我们有

$$G(f)=G(f_0)+\sum_{\alpha=1}^{p}a_\alpha G(c_\alpha).$$

又从
$$\frac{\partial G(f)}{\partial a_\alpha}=0 \quad (\alpha=1,\cdots,p)$$

得到
$$\sum_{\beta=1}^{p}G(c_\alpha)G(c_\beta)a_\beta=-G(c_\alpha)G(f_0) \quad (\alpha=1,\cdots,p).$$

或者，把它写成矩阵形式：

$$[C]^T[C][X]=-[C]^T[F], \tag{4.9}$$

其中$[C]=[G(C_\alpha)]^T$是$8(mn-1)\times p$阶矩阵，$[F]=[G(f_0)]^T$是$8(mn-1)\times 1$阶矩阵，$[X]=[a_1,\cdots,a_p]^T$是$p\times 1$阶矩阵．

从4.3段的性质4知道，当$n,m\geqslant 3$时，$G(C_1),\cdots,G(C_p)$是线性独立的，于是有

$$\operatorname{rank}([C]^T[C])=\operatorname{rank}([C])=p.$$

所以方程组(4.9)的系数矩阵是非奇的，因此方程组的解唯一存在．

4.3 一元和二元基样条的某些性质

现在，对于一元基样条$\varphi_s(x)\ (s=0,\cdots,n+2)$在内节点$x_i$处的剪力跃度，我们采用$(3.2)_1$当$\alpha=0$时的表示式，并记它为$\Delta_{x_i}\varphi_s$.

性质1 当$n\geqslant 2$时，成立

$$\Delta_{x_i}\varphi_s\neq 0 \quad (i=1,\cdots,n-1;\ s=0,\cdots,n+2).$$

实际上，我们从基样条的性质得知：对于任何$\varphi_s(x)$，一定成立

$$\varphi_s''(x_i)\varphi_s''(x_{i+1})<0 \quad (i=0,\cdots,n-1),$$

而且 $\varphi_s''(x)$ 是分段线性的. 所以 $\varphi_s'''(x)$ 在各分段的常数值是正负相间, 因此 $\Delta_{x_i}\varphi_s\neq 0$.

性质 2　当 $n\geqslant 3$ 时, $\{\Delta_{x_i}\varphi_{n+1}\}$ 和 $\{\Delta_{x_i}\varphi_{n+2}\}$ 是线性独立的.

实际上, 假如存在不全为零的常数 λ 和 μ, 使得

$$\lambda\Delta_{x_i}\varphi_{n+1}+\mu\Delta_{x_i}\varphi_{n+2}=0 \quad (i=1, \cdots, n-1),$$

即

$$\Delta_{x_i}(\lambda\varphi_{n+1}+\mu\varphi_{n+2})=0 \quad (i=1, \cdots, n-1).$$

那末, 三次样条 $\lambda\varphi_{n+1}+\mu\varphi_{n+2}$ 在 $[x_0, x_n]$ 中是关于 x 的三次多项式. 可是按照 φ_{n+1} 和 φ_{n+2} 的定义, 它们在 $[x_0, x_n]$ 中都有 $n+1$ 个零点. 所以当 $n\geqslant 3$ 时, 这是不可能的.

性质 3　由二元基样条 $\varphi_s(x)\psi_t(y)$ $(s=0, \cdots, n+2;\ t=0, \cdots, m+2)$ 所组成的节点跃度向量 $\boldsymbol{G}(\varphi_s\psi_t)$ 是非零的.

实际上, 假如有 $\boldsymbol{G}(\varphi_s\psi_t)=0$, 也就是

$$\Delta_{x_i}\varphi_s\psi_t^{(\alpha)}(y_j)=0 \quad \begin{pmatrix} i=1, \cdots, n-1;\ j=0, \cdots, m; \\ s=0, \cdots, n+2;\ t=0, \cdots, m+2; \\ \alpha=0, \cdots, 3 \end{pmatrix}.$$

我们总可选取适当的 α 和 j, 使 $\psi_t^{(\alpha)}(y_j)\neq 0$, 因此有

$$\Delta_{x_i}\varphi_s=0 \quad (i=1, \cdots, n-1;\ s=0, \cdots, n+2).$$

这和性质 1 相矛盾.

性质 4　设从 $S(x, y;\ \Delta)$ 中取 $2(m+n)+8$ 个和边界条件有关的基样条 $(n, m\geqslant 3)$, 那末, 由它们组成的节点跃度向量 $\boldsymbol{G}(\varphi_{n+1}\psi_t)$, $\boldsymbol{G}(\varphi_{n+2}\psi_t)$, $\boldsymbol{G}(\varphi_s\psi_{m+1})$, $\boldsymbol{G}(\varphi_s\psi_{m+2})$ $(s=0, \cdots, n+2;\ t=0, \cdots, m+2)$ 是线性独立的.

实际上, 假如成立

$$\sum_{j=0}^{m}C_j\boldsymbol{G}(\varphi_{n+1}\psi_j)+\sum_{j=0}^{m}C_j^*\boldsymbol{G}(\varphi_{n+2}\psi_j)+\sum_{i=0}^{n}d_i\boldsymbol{G}(\varphi_i\psi_{m+1})$$
$$+\sum_{i=0}^{n}d_i^*\boldsymbol{G}(\varphi_i\psi_{m+2})+p\boldsymbol{G}(\varphi_{n+1}\psi_{m+1})+p^*\boldsymbol{G}(\varphi_{n+2}\psi_{m+1})$$
$$+q\boldsymbol{G}(\varphi_{n+1}\psi_{m+2})+q^*\boldsymbol{G}(\varphi_{n+2}\psi_{n+2})=0.$$

把它改写成分量形式:

$$\sum_{j=0}^{m} C_j \Delta_{x_k}\varphi_{n+1}\psi_j^{(\alpha)}(y_l) + \sum_{j=0}^{m} C_j^* \Delta_{x_k}\varphi_{n+2}\psi_j^{(\alpha)}(y_l)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} d_i \Delta_{x_k}\varphi_i\psi_{m+1}^{(\alpha)}(y_l) + \sum_{i=0}^{n} d_i^* \Delta_{x_k}\varphi_i\psi_{m+2}^{(\alpha)}(y_l)$$
$$+ p\Delta_{x_k}\varphi_{n+1}\psi_{m+1}^{(\alpha)}(y_l) + p^*\Delta_{x_k}\varphi_{n+2}\psi_{m+1}^{(\alpha)}(y_l)$$
$$+ q\Delta_{x_k}\varphi_{n+1}\psi_{m+2}^{(\alpha)}(y_l) + q^*\Delta_{x_k}\varphi_{n+2}\psi_{m+2}^{(\alpha)}(y_l) = 0 \quad (4.10)$$

和

$$\sum_{j=0}^{m} C_j \Delta_{y_g}\psi_j\varphi_{n+1}^{(\alpha)}(x_h) + \sum_{j=0}^{m} C_j^* \Delta_{y_g}\psi_j\varphi_{n+2}^{(\alpha)}(x_h)$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} d_i \Delta_{y_g}\psi_{m+1}\varphi_i^{(\alpha)}(x_h) + \sum_{i=0}^{n} d_i^* \Delta_{y_g}\psi_{m+2}\varphi_i^{(\alpha)}(x_h)$$
$$+ p\Delta_{y_g}\psi_{m+1}\varphi_{n+1}^{(\alpha)}(x_h) + p^*\Delta_{y_g}\psi_{m+1}\varphi_{n+2}^{(\alpha)}(x_h)$$
$$+ q\Delta_{y_g}\psi_{m+2}\varphi_{n+1}^{(\alpha)}(x_h) + q^*\Delta_{y_g}\psi_{m+2}\varphi_{n+2}^{(\alpha)}(x_h) = 0 \quad (4.11)$$

$$(k=1, \cdots, n-1;\ l=0, \cdots, m;\ g=1, \cdots, m-1;$$
$$h=0, \cdots, n;\ \alpha=0, \cdots, 3).$$

在(4.10)中特别选取 $\alpha=0$. 根据基样条 $\{\varphi_i\}$ 和 $\{\psi_l\}$ 的定义，我们便得到

$$C_l\Delta_{x_k}\varphi_{n+1} + C_l^*\Delta_{x_k}\varphi_{n+2} = 0.$$

按照性质 2, 就有

$$C_l=0 \quad 和 \quad C_l^*=0 \quad (l=0, \cdots, m).$$

同样地，在(4.11)中特别选取 $\alpha=0$, 有

$$d_h=0 \quad 和 \quad d_h^*=0 \quad (h=0, \cdots, n).$$

其次，在(4.10)中选取 $\alpha=1$ 和 $l=0$, 便有

$$p=0 \quad 和 \quad p^*=0.$$

最后，在(4.10)中选取 $\alpha=1$ 和 $l=m$, 又得到

$$q=0 \quad 和 \quad q^*=0.$$

第八章　高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量

我们在第三章关于三次参数曲线段的研究中，运用代数曲线论的仿射不变量理论，找到了一个重要的仿射不变量

$$I=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}.$$

按照 I 的符号，我们对三次参数曲线进行了以实奇点和实拐点的个数作为特征的仿射分类．从而给出了判断和控制三次参数曲线段形状的几种实用的算法．经过适当的仿射变换，这套算法同样可以应用到三次 Bézier 曲线与三次 B 样条曲线的形状控制问题中(见第四章)．

现在，我们要把这一套仿射不变量理论应用到平面上五次和更一般的 n 次参数曲线的场合，最后拓广到讨论 m 维仿射空间 n 次参数曲线的内在仿射不变量问题．研究这样一类问题的意义在于：如果我们能够找到 n 次参数曲线段的仿射不变量和实奇点及实拐点的分布，那就可以实现对 n 次 Bézier 曲线和 n 次 B 样条曲线的形状控制．这是一个在当前计算几何学科中尚未完全解决的问题．从参数曲线的仿射不变量出发，进而可以研究参数曲面的

相应课题．这些课题将是研究 Coons 曲面、Bézier 曲面和 B 样条曲面的形状控制问题的理论基础，难度是相当大的，然而有着重要的实际意义和应用价值．

§1　代数曲线论中一些有关的概念和结论

在平面上仿射坐标(x, y)下，由 n 次代数方程

$$F(x, y)=\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\leq n}}^{n} a_{ij}x^i y^j=0 \tag{1.1}$$

表示的曲线叫做平面 n 次代数曲线，记成 C_n．一般地，C_n 与平面上任一直线有 n 个交点①．反之，凡与任一直线有 n 个交点的代数曲线必定是 n 次的．

我们知道，C_n 经过双有理变换后，它的奇点都可归结为二重点和尖点两类．设 C_n 有 d 个二重点和 s 个尖点，那末奇点总数 $d+s$ 不能超过 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$．通常称

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-s \tag{1.2}$$

为 C_n 的亏格．

如果 C_n 上动点的齐次坐标 (x, y, z) 都是参数 t 的 n 次多项式时，称它为 **n 次有理曲线** (Burau, 1962)．n 次有理曲线必定是 C_n——这从曲线和任意一条直线 $\lambda x+\mu y+\nu z=0$ 必有 n 个交点的事实便可明了，而且它的亏格 $p=0$．反过来，凡亏格 $p=0$ 的 C_n 必定是某参数 t 的 n 次有理曲线，因此奇点（包括二重点和尖点两种）的总数等于 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，而且有 $3n-4$ 个拐点．

n 次有理整曲线是指的非齐次坐标(x, y)由参数方程

① 这里讲的交点和后面讲的奇点与拐点，都包括虚点在内。

$$\begin{cases} x=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}a_it^i, \\ y=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}b_it^i \end{cases} \tag{1.3}$$

(不妨假定 $b_n\neq0$) 表示的曲线. 同一般的同次有理曲线一样，它也具有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个奇点，但是只有 $2n-4$ 个拐点，比 n 次有理曲线要少 n 个. 这就是有理整曲线在几何外形计算的大多数场合中更为有用的一个依据.

Coons (1967) 和 A. A. Ball (1974, 英国飞机公司的 CONSURF 系统) 在航空工业的几何外形设计系统中应用了三次有理曲线作为构造曲面的参数网. 他们的意图是希望把二次代数曲线(包括椭圆、双曲线和抛物线)和三次有理整曲线统一在三次有理曲线中，这是因为二次代数曲线在航空工业的传统设计方法中应用极多却不能被包括在三次有理整曲线中的缘故.

m 维仿射空间的一般**仿射变换**是

$$A_m:\ x\to\bar{x},\ x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),\ \bar{x}=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_m),$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{10}\\ a_{20}\\ \vdots\\ a_{m0}\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$J\equiv\det|a_{ij}|\neq0,$$

当 $m=2$ 时，平面曲线 C_n 在有限处的拐点个数和奇点个数对于仿射变换 A_2 是不变的，而且，对于**参数的线性变换**

$$T:\ t\to\bar{t},\ t=C\bar{t}+f\quad(C\neq0)$$

也是不变的.

设 n 次有理整曲线(1.3)的各系数经过参数的线性变换T变为

$$a_i\to\bar{a}_i,\ b_i\to\bar{b}_i\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

如果各系数的一个函数 $\Phi(a_0,\ \cdots,\ a_n;\ b_0,\ \cdots,\ b_n)$ 满足下列关系:

$$\Phi(\bar{a}_0, \cdots, \bar{a}_n; \bar{b}_0, \cdots, \bar{b}_n) = C^r\Phi(a_0, \cdots, a_n; b_0, \cdots, b_n),$$

式中 r 是整数，那末我们称 Φ 是(关于参数的线性变换的)**权 r 的相对仿射不变量**. 当$r=0$时，称为(关于参数的线性变换的)**内在仿射不变量**. 对于仿射变换 A_2 的相对仿射不变量的权 r 有着相似的定义，只要把上述变换 T 改成变换 A_2，上式中的 C 改成 J.

§2 一类五次有理整曲线

在样条插值理论中，除了常用的三次参数样条曲线外，我们往往遇到五次参数样条曲线. 这类样条的每一段都是五次有理整曲线段. 这一节的主要结果如下(苏步青[4]，1977)：

在 2.1 中将证明：五次参数样条有理整曲线段通过其两端有关参数适当的调整，常常可使原来具有六个拐点的曲线变为仅有四个拐点的曲线. 后者简称“五次有理曲线”. 这里必须注意，本节讲的“五次有理曲线”是一类特殊的五次有理整曲线，并不是前节定义意义下的五次有理曲线. 这里我们设计了两种调整，使五次参数样条曲线的各段经调整结点参数后，都变成五次有理曲线段，并在结点处保持着一阶连续导数.

在 2.2 导出一个相对仿射不变量 I.

2.3 的内容包括奇点的探讨和三个由拐点方程推出的相对仿射不变量 g, b, a 的研究. 按照 g 和 b 的符号，我们确定了五次有理曲线上实奇点个数的分布情况.

2.1 五次参数样条曲线

五次有理整曲线

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{i!} a_i t^i, \\ y = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{i!} b_i t^i \end{cases} \tag{2.1}$$

一般有六个拐点. 要使拐点个数尽可能减少，就必须有下述两条件才得实现，于是曲线只有四个拐点，除非原曲线变为简单五次曲线. 我们在这里所讨论的这种曲线，简称五次有理曲线.

设在(2.1)中 $b_5\neq0$，而且令

$$p_{ij}=a_ib_j-a_jb_i\quad(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5).$$

我们在整篇讨论中假定下列条件成立：

$$p_{35}=0,\ p_{45}=0,\ p_{25}\neq0. \tag{2.2}$$

这里首先指出：如果 $p_{25}=0$，那么曲线变为简单的五次曲线，它的方程是：

$$y=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f.$$

但是，本文中不讨论这个特殊情况.

对于五次参数样条曲线的每一段，能否通过其两端点 $(x_0,\ y_0)$ 和 $(x_1,\ y_1)$ 的斜率参数 $(x_0',\ y_0')$ 和 $(x_1',\ y_1')$ 以及二阶导数 $(x_0'',\ y_0'')$ 和 $(x_1'',\ y_1'')$ 的适当调整使之成为五次有理曲线呢？我们的回答是肯定的，下面就是证明.

为方便起见，设两端点的参数值分别是 $t=0$ 和 $t=1$. 我们还选取直角坐标系 Oxy 使两端点重合到原点和点 $(l,\ 0)$，这里 l 表示两端点间的弦长. 那么，五次参数样条曲线的方程可写为

$$\begin{cases} x(t)=x_0p_0(t)+x_0'p_1(t)+x_0''p_2(t)\\ \qquad+x_1q_0(t)+x_1'q_1(t)+x_1''q_2(t),\\ y(t)=y_0p_0(t)+y_0'p_1(t)+y_0''p_2(t)\\ \qquad+y_1q_0(t)+y_1'q_1(t)+y_1''q_2(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

式中 $0\leqslant t\leqslant1$, $x_0'=\left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$, $x_1'=\left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=1}$, $x_0''=\left.\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$, 等等. 而且根据坐标系的选定，$x_0=y_0=0$, $x_1=l$, $y_1=0$. 此外，六个函数的具体表示如下：

$$\begin{cases} p_0(t)=1-q_0(t), \\ q_0(t)=t^3(6t^2-15t+10), \\ p_1(t)=-t(t-1)^3(3t+1), \\ q_1(t)=-t^3(t-1)(3t-4), \\ p_2(t)=-\dfrac{1}{2}t^3(t-1)^3, \\ q_2(t)=\dfrac{1}{2}t^3(t-1)^2. \end{cases} \tag{2.4}$$

经过整理，便可把(2.3)写成形如(2.1)的方程，只是其中除 $a_0=b_0=0$ 以外，还有：

$$\begin{cases} a_1=x_0',\ a_2=x_0'', \\ a_3=60l-36x_0'-9x_0''-24x_1'+3x_1'', \\ a_4=-360l+192x_0'+36x_0''+168x_1'-24x_1'', \\ a_5=720l-360x_0'-60x_0''-360x_1'+60x_1'', \\ b_1=y_0',\ b_2=y_0'', \\ b_3=-36y_0'-9y_0''-24y_1'+3y_1'', \\ b_4=192y_0'+36y_0''+168y_1'-24y_1'', \\ b_5=-360y_0'-60y_0''-360y_1'+60y_1''. \end{cases} \tag{2.5}$$

当 x_0', y_0'; x_1', y_1'; x_0'', x_1'' 被预先给定时，a_3, a_4, a_5 以及 a_1, a_2, b_1 都是已知的．我们要决定 b_2, b_3, b_4 和 b_5，使之满足条件(2.2)，就必须有

$$b_3-\lambda b_5=0,\ b_4-\mu b_5=0, \tag{2.6}$$

式中已令

$$\lambda=\frac{a_3}{a_5},\ \mu=\frac{a_4}{a_5}. \tag{2.7}$$

把(2.5)式中有关的表示式代入(2.6)，我们得出关于 y_0'', y_1'' 的一个线性方程组，而且这组在条件

$$D\equiv\frac{60}{a_5}(x_0'+x_1'-2l)\neq 0 \tag{2.8}$$

之下有解：

$$\begin{cases} y_0''=\dfrac{1}{D}\{-(4y_0'+y_1')-20(2y_0'+y_1')\lambda \\ \qquad -5(3y_0'+y_1')\mu\}, \\ y_1''=\dfrac{1}{D}\{3(2y_0'+3y_1')+20(y_0'+2y_1')\lambda \\ \qquad +5(3y_0'+5y_1')\mu\}. \end{cases} \tag{2.9}$$

至于(2.2)式中的第三条件,我们可表为

$$(6x_0'+6x_1'-x_1''-12l)y_0''-(6y_0'+6y_1'-y_1'')x_0''\neq 0. \tag{2.10}$$

使(2.2)实现的上述调整,并不是唯一的. 例如,代替 x_0', y_0' 和 x_1', y_1' 分别采用 $\rho x_0'$, $\rho y_0'$ 和 $\sigma x_1'$, $\sigma y_1'$ $(\rho\sigma\neq 0)$, 从而保持曲线在两端点的斜率不变. 这么一来,在一般情况下可以决定 ρ, σ(一般有两组解),使得(2.2)全部满足.

综合起来,我们得到

定理 对于五次参数样条曲线我们通过其两端点的各一坐标关于参数的二阶导数值的适当选取, 或者通过各端点两坐标关于参数的一阶导数值的调整但保持各该斜率不变, 恒可使这条曲线变为五次有理曲线.

2.2 一个相对仿射不变量

我们现在对于一条由(2.1)和(2.2)定义起来的五次有理曲线进行仿射变换:

$$\begin{cases} \bar{x}=\alpha x+\beta y+\xi, \\ \bar{y}=\gamma x+\delta y+\eta. \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $J\equiv\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, 以及参数 t 的线性变换:

$$t=e\bar{t}+f, \ (e\neq 0). \tag{2.12}$$

这时,原曲线被变换为下列表示的曲线:

$$\bar{x}=\sum_{j=0}^{5}\frac{1}{j!}\bar{a}_j\bar{t}^j, \ \bar{y}=\sum_{j=0}^{5}\frac{1}{j!}\bar{b}_j\bar{t}^j, \tag{2.13}$$

式中已令

$$\begin{cases}\bar{a}_j=e^j\sum\limits_{k=0}^{5-j}\frac{1}{k!}(\alpha a_{k+j}+\beta b_{k+j})f^k,\\ \bar{b}_j=e^j\sum\limits_{k=0}^{5-j}\frac{1}{k!}(\gamma a_{k+j}+\delta b_{k+j})f^k\end{cases}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5).\quad (2.14)$$

如同原曲线(2.1)所定义的一样，我们从(2.13)作出相应的表示：

$$\bar{p}_{ij}=\bar{a}_i\bar{b}_j-\bar{a}_j\bar{b}_i\quad (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5),$$

而且按照(2.14)计算它们的具体式子，特别是：

$$\bar{p}_{45}=e^9Jp_{45},$$
$$\bar{p}_{35}=e^8J(p_{35}+fp_{45}),$$
$$\bar{p}_{25}=e^7J\left(p_{25}+fp_{35}+\frac{1}{2}f^2p_{45}\right).$$

从(2.2)容易看出类似的关系：

$$\begin{cases}\bar{p}_{35}=0,\ \bar{p}_{45}=0,\\ \bar{p}_{25}\neq 0.\end{cases}\qquad (2.15)$$

这就表明了，曲线是五次有理的这一性质，对于曲线的任何非奇异的仿射变换和参数的线性变换都是不变的。

在第三章已经证明，一般三次参数样条曲线必定是三次有理曲线，它还具有一个关于变换(2.11)和(2.12)的相对仿射不变量。现在我们将对五次有理曲线找寻类似的对象。

为此目的，首先把(2.2)中的前两关系写成

$$\begin{cases}a_3=\lambda a_5,\ b_3=\lambda b_5,\\ a_4=\mu a_5,\ b_4=\mu b_5.\end{cases}\qquad (2.16)$$

同样，把(2.15)中的前两等式写成

$$\begin{cases}\bar{a}_3=\bar{\lambda}\bar{a}_5,\ \bar{b}_3=\bar{\lambda}\bar{b}_5,\\ \bar{a}_4=\bar{\mu}\bar{a}_5,\ \bar{b}_4=\bar{\mu}\bar{b}_5.\end{cases}\qquad (2.17)$$

实际上，从(2.14)和(2.16)容易证明：

$$\begin{cases}\bar{\lambda}=\dfrac{1}{e^2}\left(\lambda+\mu f+\dfrac{1}{2}f^2\right),\\ \bar{\mu}=\dfrac{1}{e}(\mu+f).\end{cases}\tag{2.18}$$

从(2.16)又得

$$\begin{cases}p_{13}=\lambda p_{15},\ p_{14}=\mu p_{15},\\ p_{23}=\lambda p_{25},\ p_{24}=\mu p_{25},\\ p_{34}=0,\ p_{25}\neq 0.\end{cases}\tag{2.19}$$

同样，由(2.17)也可导出类似(2.19)的关系.

其次，我们从(2.14)把每个 $\bar{p}_{ij}$ 表成为关于 p_{rs} 的线性组合，其中特别得到如下的几个：

$$\begin{cases}\bar{p}_{12}=e^3J\left\{p_{12}+\lambda p_{15}f+\dfrac{1}{2}(\lambda p_{25}+\mu p_{15})f^2\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{1}{6}(2\mu p_{25}+p_{15})f^3+\dfrac{1}{8}p_{25}f^4\right\},\\ \bar{p}_{25}=e^7Jp_{25},\\ \bar{p}_{23}=e^5J\left\{p_{23}+\left(\mu+\dfrac{1}{2}f\right)fp_{25}\right\},\\ \bar{p}_{13}=e^4J\left\{p_{13}+\left(\mu+\dfrac{1}{2}f\right)fp_{15}\right.\\ \qquad\left.+\dfrac{1}{2}\left(\lambda+\mu f+\dfrac{1}{2}f^2\right)fp_{25}\right\},\\ \bar{p}_{15}=e^6J(p_{15}+p_{25}f),\\ \bar{p}_{14}=e^5J\{p_{14}+p_{15}f+(\mu+f)fp_{25}\}.\end{cases}\tag{2.20}$$

在推导过程中，我们利用了(2.19)，借以改写各关系式右边括号中第二项以下的总和使之成为 p_{15} 和 p_{25} 的线性组合.

从此导出：

$$\bar{p}_{12}\bar{p}_{25}=e^{10}J^2\left\{p_{12}p_{25}+f\left(\lambda+\frac{1}{2}\mu f+\frac{1}{6}f^2\right)p_{15}p_{25}\right.$$
$$\left.+f^2\left(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{3}\mu f+\frac{1}{8}f^2\right)p_{25}^2\right\},$$

$$\bar{p}_{23}^2=e^{10}J^2\left\{p_{23}^2+\left(\mu+\frac{1}{2}f\right)f\left(2\lambda+\mu f+\frac{1}{2}f^2\right)p_{25}^2\right\},$$

$$\bar{p}_{13}\bar{p}_{15}=e^{10}J^2\left\{p_{13}p_{15}+\left(\mu+\frac{1}{2}f\right)fp_{15}^2\right.$$
$$+2\left(\lambda+\mu f+\frac{1}{2}f^2\right)fp_{15}p_{25}$$
$$\left.+\left(\lambda+\mu f+\frac{1}{2}f^2\right)f^2p_{25}^2\right\},$$

$$\bar{p}_{14}^2=e^{10}J^2\left\{p_{14}^2+2\left(\mu+\frac{1}{2}f\right)fp_{15}^2\right.$$
$$\left.+2f(\mu+f)^2p_{15}p_{25}+f^2(\mu+f)^2p_{25}^2\right\},$$

$$\bar{p}_{14}\bar{p}_{23}=e^{10}J^2\left\{p_{14}p_{23}+f\left[\lambda+(\mu+f)\left(\mu+\frac{1}{2}f\right)\right]p_{15}p_{25}\right.$$
$$\left.+\left(\lambda+\mu f+\frac{1}{2}f^2\right)(\mu+f)fp_{25}^2\right\}.$$

如果令

$$I=3p_{12}p_{25}+\frac{1}{2}p_{23}^2-p_{13}p_{15}+\frac{1}{2}p_{14}^2-p_{14}p_{23},\qquad(2.21)$$

并同样定义对应的表示 $\bar{I}$，我们便获得

$$\bar{I}=e^{10}J^2I.\qquad(2.22)$$

定理　由(2.21)定义的 I 对于曲线的非奇异仿射变换和参数的线性变换分别是权为 2 和 10 的相对仿射不变量.

在下一节我们还要从另一方面证明这个定理.

2.3　奇点和拐点及其有关的三个相对仿射不变量

我们所讨论的有理曲线 (2.1) 确实是五次代数曲线——这一事实，是可按适当的变换 (2.11) 和(2.12)把曲线的参数表示化为较简单的形式后加以证明的.

实际上，我们选取仿射变换

$$\begin{cases} \bar{x} = -\dfrac{2b_5}{p_{25}}x + \dfrac{2a_5}{p_{25}}y + \xi, \\ \bar{y} = \dfrac{120}{b_5}y + \eta \end{cases}$$

(式中 ξ, η 是适当地选好的常数)和参数变换

$$t = \bar{t} - \frac{p_{15}}{p_{25}},$$

便可算出变换后的参数表示:

$$\bar{x} = -\bar{t}^2,\ \bar{y} = g\bar{t} + c\bar{t}^2 + b\bar{t}^3 + a\bar{t}^4 + \bar{t}^5. \tag{2.23}$$

这里,各系数的具体表示当然可以通过实际的运算来求,但是如下面所示,其中只有 a, b 和 g 是在讨论奇点和拐点时用到的,而且通过上述的 p_{ij} 和 $\bar{p}_{ij}$ 之间的关系就能简单得出它们的. 因为,这时

$$J = -\frac{240}{p_{25}},\ e = 1,\ f = -\frac{p_{15}}{p_{25}};$$

$$\bar{p}_{12} = 2g,\ \bar{p}_{23} = -12b,\ \bar{p}_{25} = -240,$$

$$\bar{p}_{24} = -48a,\ \text{其他 } \bar{p}_{ij} = 0.$$

所以我们得到

$$a = 5\left(\mu - \frac{p_{15}}{p_{25}}\right), \tag{2.24}$$

$$b = 20\left[\frac{p_{23}}{p_{25}} - \mu\frac{p_{15}}{p_{25}} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_{15}}{p_{25}}\right)^2\right], \tag{2.25}$$

$$g = -120\left[\frac{p_{12}}{p_{25}} - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{p_{15}}{p_{25}}\right)^2 + \frac{1}{6}\mu\left(\frac{p_{15}}{p_{25}}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{p_{15}}{p_{25}}\right)^4\right]. \tag{2.26}$$

从(2.23)消去 $\bar{t}$, 就获得五次有理曲线的隐函数方程:

$$F(x, y) \equiv (y + cx - ax^2)^2 + x(x^2 - bx + g)^2 = 0. \tag{2.27}$$

这里方便上,把 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 写成 x, y.

现在已经没有什么困难地求出实奇点的个数和坐标了. 在具体的计算过程中,我们要按照 $g<0$, $g>0$ 或 $g=0$ 区分为三大类,

而且在各大类中还要按照 b 的正、负或 0 而区分为若干细类. 把计算的结果列表如下:

	g	b	实奇点	坐标
I	$g<0$	任意	一个二重点	(x_{-1}, y_{-1})
II	$g>0$	II_1: $b>-2\sqrt{g}$ II_2: $b<-2\sqrt{g}$	无 两个二重点	 $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ $\varepsilon=\pm1$
III	$g=0$	III_1: $b\geqq0$ III_2: $b<0$	一个尖点 {一个二重点 {一个尖点	$(0, 0)$ (b, ab^2-ac) $(0, 0)$

表中已置

$$x_\varepsilon=\frac{1}{2}(b+\varepsilon\sqrt{b^2-4g}),$$

$$y_\varepsilon=(ab-c)x_\varepsilon-ag, \quad (\varepsilon=\pm1).$$

上述的三个量 a, b 和 g 不但出现于奇点的决定, 而且还出现于拐点的方程之中. 实际上, 曲线(2.23)的拐点决定于

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2}-\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}=0,$$

即

$$\bar{t}^4+\frac{8}{15}a\bar{t}^3+\frac{1}{5}b\bar{t}^2-\frac{g}{15}=0. \tag{2.28}$$

令

$$A=\frac{8}{15}a, \ B=\frac{1}{5}b, \ G=-\frac{1}{15}g. \tag{2.29}$$

如所知, 对方程(2.28)求根的问题, 归结为对方程

$$(A\lambda)^2=(\lambda^2-G)(A^2+8\lambda-4B)$$

的求根, 或者令 $\tau=\lambda-\frac{2}{3}B$, 归结为对标准方程

$$\tau^3+p\tau+q=0 \tag{2.30}$$

的求根, 式中

$$\begin{cases} p=-\left(G+\dfrac{4}{3}B^2\right), \\ q=-\left(\dfrac{1}{6}BG+\dfrac{1}{8}GA^2+\dfrac{16}{27}B^3\right). \end{cases} \tag{2.31}$$

从此作判别式:

$$D=(15)^4(4p^3+27q^2). \tag{2.32}$$

经过整理,便得到 D 由 a, b 和 g 表达的最后形式:

$$D=g\left(240g^2+\frac{192}{25}a^4g-\frac{549}{4}b^2g+\frac{72}{5}ga^2b+\frac{432}{5}b^4-\frac{768}{25}a^2b^3\right). \tag{2.33}$$

如果把 a, b, g 的表示 (2.24), (2.25), (2.26) 代进 (2.33), 我们就有:

$$D=\Phi\left(\frac{p_{12}}{p_{25}},\ \frac{p_{15}}{p_{25}},\ \frac{p_{23}}{p_{25}},\ \lambda,\ \mu\right). \tag{2.34}$$

这样,我们得到

定理 要使五次有理曲线上出现最小个数的实拐点, 就必须选取判别式 $D\geqslant 0$ 的曲线.

实际上,方程(2.30)的根是实还是虚的判别如下:

1. 当 $D>0$ 时,有一实根和两虚根;
2. 当 $D=0$ 时,有相等的两实根;
3. 当 $D<0$ 时,有三不同的实根.

如果我们对五次有理曲线(2.1)先施行变换 (2.11) 和 (2.12) 使之变为由 (2.13) 表示的曲线, 然后再施行本节最初选取的变换使(2.13)又变为类似(2.23)的方程,那么,后者之中的各有关系数 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$ 与原先的对应系数 a, b, g 之间究竟有什么关系呢?

从(2.24)～(2.26)和其对应量 $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$ 的类似表示出发,参考到(2.18)和(2.20),我们容易检证:

$$\bar{a}=\frac{1}{e}a,\ \bar{b}=\frac{1}{e^2}b,\ \bar{g}=\frac{1}{e^4}g. \tag{2.35}$$

这就表明了，a, b, g, 从而 Φ 都是相对仿射不变量.

实际上，

$$\Phi\left(\frac{\bar{p}_{12}}{\bar{p}_{25}}, \frac{\bar{p}_{15}}{\bar{p}_{25}}, \frac{\bar{p}_{23}}{\bar{p}_{25}}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\right) = e^{-12}\Phi\left(\frac{p_{12}}{p_{25}}, \frac{p_{15}}{p_{25}}, \frac{p_{23}}{p_{25}}, \lambda, \mu\right). \tag{2.36}$$

最后，还须指出：从(2.35)容易证明(2.22). 因为，经过计算就可把(2.21)的 I 表成：

$$I = \frac{1}{800} p_{25}^{2}(b^2 - 20g), \tag{2.37}$$

再利用(2.20)和(2.35)立即得出(2.22).

§3 n 次有理整曲线的几个相对仿射不变量

设 n 次有理整曲线

$$\begin{cases} x = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!} a_i t^i, \\ y = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!} b_i t^i \end{cases} \tag{3.1}$$

满足 h 个条件

$$\begin{aligned} &p_{r,n} = 0 \quad (r = n-h, n-h+1, \cdots, n-1), \\ &p_{n-h-1,n} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $0 \leqslant h \leqslant n-3$①，而且

$$p_{i,j} = a_i b_j - a_j b_i \quad (i < j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{3.3}$$

条件(3.2)说明，(3.1)两式后面 $h+1$ 项的系数成比例.

我们要证明，这种有理整曲线具有 $2n-h-4$ 个相对仿射不变量(苏步青[5]，1977).

---

① 当 $h = n-2$ 时，曲线可表为 $y = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$ 的形式，拐点数为 $n-2$.

3.1 有理整曲线的拐点

有理整曲线的方程(3.1)经过xy-平面的仿射变换(式中$J\equiv\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$)

$$\begin{cases}\bar{x}=\alpha x+\beta y+\xi,\\ \bar{y}=\gamma x+\delta y+\eta,\end{cases}\tag{3.4}$$

和参数的线性变换

$$t=c\bar{t}+f\ (c\neq0),\tag{3.5}$$

就变为同形式的方程,即

$$\begin{cases}\bar{x}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\bar{a}_i\bar{t}^i,\\ \bar{y}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\bar{b}_j\bar{t}^j.\end{cases}\tag{3.6}$$

这里我们已令①

$$\begin{cases}\bar{a}_i=c^i\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!}(\alpha a_{k+i}+\beta b_{k+i})f^k,\\ \bar{b}_j=c^j\sum_{l=0}^{n-j}\frac{1}{l!}(\gamma a_{l+j}+\delta b_{l+j})f^l.\end{cases}\tag{3.7}$$

从此容易算出$\bar{p}_{i,j}=\bar{a}_i\bar{b}_j-\bar{a}_j\bar{b}_i$:

$$\bar{p}_{i,j}=c^{i+j}J\sum_{k=0}^{n-i}\sum_{l=0}^{n-j}\frac{1}{k!\,l!}p_{k+i,\,l+j}\cdot f^{k+l}$$

$$(i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\tag{3.8}$$

特别是,我们有

$$\bar{p}_{i,n}=c^{n+i}J\sum_{k=0}^{n-i}\frac{1}{k!}p_{k+i,n}\cdot f^k.$$

因此,当$n-h\leqslant i\leqslant n-1$时,我们得到

$$n-h\leqslant k+i\leqslant n-1,$$

$$\begin{cases}\bar{p}_{i,n}=0,\\ \bar{p}_{n-h-1,n}=c^{2n-h-1}Jp_{n-h-1,n}\neq0.\end{cases}\tag{3.9}$$

---

① 当i, $j=0$时,(3.7)的右侧应再分别加上ξ和η.

这就表明，我们所讨论的是具有内在仿射不变性质的有理整曲线.

为了后文的需要，我们从(3.8)还导出一个重要的等式

$$\frac{\bar{p}_{n-h-2,n}}{\bar{p}_{n-h-1,n}}=\frac{1}{c}\left(\frac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}+f\right). \tag{3.10}$$

另外，必须指出一套来自(3.2)的关系

$$p_{r,s}=0,\quad (r<s;\ r,\ s=n-h,\ n-h+1,\ \cdots,\ n-1). \tag{3.11}$$

现在，我们转到有理整曲线(3.1)的拐点的研究. 用 $'$, $''$ 分别表示关于参数 t 的一阶、二阶导数，便可把拐点的方程 $x'y''-x''y'=0$ 写成

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{(i-1)!\,(j-2)!}p_{i,j}t^{i+j-3}=0,$$

或

$$\sum_{k=0}^{2n-h-4}\frac{1}{k!}g_k t^k=0, \tag{3.12}$$

式中已置

$$g_k=k!\sum_i\frac{1}{(i-1)!\,(k+1-i)!}p_{i,k+3-i}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-h-4). \tag{3.13}$$

$\sum\limits_i$ 中 i 的取值范围是 $\max(1,\ k+3-n)\leqslant i\leqslant\min(n,\ k+2)$.

我们在(3.12)的推导中应用了(3.9)和(3.11)，而且得出曲线(3.1)一般具有 $(2n-h-4)$ 个拐点这一事实，这从下一节也可看出.

3.2　伴随变换 T^* 和相对仿射不变量

有理整曲线有这样一个特点，就是当它受到某一变换 T^* 时(我们称之为伴随变换)，它的参数方程大大简化了. 这里，T^* 的表示方程如下：

$$\begin{cases} x^*=\dfrac{(n-h-1)!\,b_n}{p_{n-h-1,n}}x-\dfrac{(n-h-1)!\,a_n}{p_{n-h-1,n}}y+\xi^*, \\ y^*=\dfrac{1}{b_n}y+\eta^*; \end{cases} \tag{3.14}$$

$$t^*=t+\frac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}. \tag{3.15}$$

这时，我们有

$$\begin{cases} J^*=\dfrac{(n-h-1)!}{p_{n-h-1,n}}, \\ c^*=1,\ f^*=-\dfrac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}. \end{cases} \tag{3.16}$$

曲线的参数方程(3.1)经过其伴随变换 T^* 而变为下列的特有形式

$$\begin{cases} x^*=t^{*n-h-1}+(*)+\dfrac{1}{(n-h-3)!}a^*_{n-h-3}t^{*n-h-3}+\cdots+a^*_1t^*, \\ y^*=\dfrac{1}{n!}t^{*n}+\dfrac{1}{(n-1)!}\,b^*_{n-1}t^{*n-1}+\cdots+b^*_1t^*, \end{cases} \tag{3.17}$$

式中，(*)表示缺项，而且

$$a^*_i=\sum_{k=0}^{n-i}\frac{(n-h-1)!}{k!}\,\frac{p_{i+k,n}}{p_{n-h-1,n}}\left(-\frac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}\right)^k$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-h-3), \tag{3.18}$$

$$b^*_j=\sum_{l=0}^{n-j}\frac{1}{l!}\,\frac{b_{l+j}}{b_n}\left(-\frac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}\right)^l\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{3.19}$$

(方便上，令 $b^*_n=1$)①.

必须补充地指出，(3.17)右边的特点在于：(1)各式最高次项的系数分别是 1 和 $\frac{1}{n!}$；(2)第一式中 $(n-h-2)$ 次项消失了．这是来自(3.15)的结果．至于各式都不包含常数项，则是由于(3.14)中对 ξ^*，η^* 适当选取的结果．

从(3.18)和(3.19)得出

---

① 当 $a^*_{n-h-3}\neq0$ 时，我们可再作仿射变换和参数变换，使(3.17)保持同样的形式，但变换后的对应系数 a^*_{n-h-3} 则等于 ±1．此时，其余系数就是曲线的全系的仿射不变量．反之，当 $a^*_{n-h-3}=0$ 时，可把另一个系数化为 ±1，而同样得出全系的仿射不变量．

$$p^*_{i,j}=\sum_{k=0}^{n-i}\sum_{l=0}^{n-j}\frac{(n-h-1)!}{k!\,l!\,b_n p_{n-h-1,n}}(p_{k+i,n}b_{l+j}-p_{l+j,n}b_{k+i})$$

$$\cdot\left(-\frac{p_{n-h-2,n}}{p_{n-h-1,n}}\right)^{k+l} \tag{3.20}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-h-3;\ j>i;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

按照 $p_{i,j}$ 组成 g_k 的方式(3.13)作出 $p^*_{i,j}$ 所对应的量

$$g^*_k=k!\sum_i\frac{1}{(i-1)!\,(k+1-i)!}p^*_{i,k+3-i} \tag{3.21}$$

$$(0\leqslant k\leqslant 2n-h-4).$$

i 的取值范围同(3.13)式一样. 因为拐点的方程(3.12)对于伴随变换 T^* 是协变的，所以变换后的方程采取新的形式

$$\sum_{k=0}^{2n-h-4}\frac{1}{k!}g^*_k t^{*k}=0. \tag{3.22}$$

从(3.21)和 $n\geqslant 3$ 看出：

$$g^*_0=p^*_{12}\neq 0①.$$

令

$$G_r=\frac{g^*_r}{g^*_0}\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-h-4), \tag{3.23}$$

拐点的方程就变为

$$1+\sum_{r=1}^{2n-h-4}\frac{1}{r!}G_r t^{*r}=0. \tag{3.24}$$

我们称(3.24)为曲线在方程(3.1)之下的拐点方程.

这样获得的一系列的量 G_r，就是所讨论的有理整曲线的相对仿射不变量②.

为了阐明这个事实，我们首先对曲线进行变换(3.4)和(3.5)，

---

① $p^*_{12}\neq 0$ 是个假定. 反之，如果 $p^*_{12}=0$，从后文(3.31)得知 g^*_{2n-h-4} 是非零的常数，那么我们就取 $g^*_r(r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-h-5)$ 以代替(3.23)的 $G_r(r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-h-4)$，因此不变量个数降低一个而为 $2n-h-5$.

② 如下文中(3.27)所示，从这些 G_r 一般可导出 $2n-h-5$ 个内在仿射不变量，即：$H_s=G_s:(G_1)^s(s=2,\ 3,\ \cdots,\ 2n-h-4)$.

使其方程从(3.1)变为(3.6)，然后作出曲线在方程(3.6)之下的拐点方程

$$1+\sum_{r=1}^{2n-h-4}\frac{1}{r!}\overline{G}_r\bar{t}^{*r}=0, \tag{3.25}$$

式中

$$\bar{t}^*=\bar{t}+\frac{\bar{p}_{n-h-2,n}}{\bar{p}_{n-h-1,n}}. \tag{3.26}$$

我们容易证明

$$\overline{G}_r=c^rG_r \quad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-h-4). \tag{3.27}$$

实际上，从(3.5)、(3.10)和(3.26)得出

$$\bar{t}^*=\frac{1}{c}t^*. \tag{3.28}$$

把最后关系式代入(3.25)，并比较这样导出的方程和(3.24)，便立即导致(3.27)。

关于$(2n-h-4)$个不变量G_r，我们必须指出，当h取最大值$n-3$时，曲线的拐点个数为$n-1$。这时(3.17)第一式右边仅留下首项，即t^{*2}，所以$g_2^*=0$，从而$G_2\equiv0$。特别是，当$n=3$时，$h=0$，于是三次参数曲线只有一个非零的相对仿射不变量(参见第三章)。

另一方面，当h取最小值0时，曲线的拐点个数达到最大值$2n-4$，但是它的相对仿射不变量中，必有一个恒为零。这是因为，从(3.17)作拐点方程

$$\frac{dx^*}{dt^*}\frac{d^2y^*}{dt^{*2}}-\frac{dy^*}{dt^*}\frac{d^2x^*}{dt^{*2}}=0,$$

其左边关于$t^{*2n-h-5}$的系数是

$$\frac{h(n-h-1)}{(n-2)!}b_{n-1}^*, \tag{3.29}$$

于是当$h=0$时它消失了：

$$G_{2n-5}\equiv0. \tag{3.30}$$

剩下的是要讨论 $0<h<n-3$ 的情况. 首先, 从(3.29)得到

$$g^*_{2n-h-5}=h(n-1)(n-h-1)b^*_{n-1}.$$

又从(3.21)或直接从(3.17)算出

$$g^*_{2n-h-4}=\frac{(h+1)(n-h-1)(2n-h-4)!}{(n-1)!}, \tag{3.31}$$

它是非零的常数.

当然, 我们由(3.23)可导出 $(2n-h-4)$ 个相对仿射不变量 G_r, 其中 $G_{2n-h-5}\neq 0$. 但是这些不变量之间可能存在着函数关系. 例如在 $n=5$, $h=1$ 的情况下, 就有这样的一个关系. 因为, 这时我们从(3.17)可以求出

$$g^*_0=a^*_1b^*_2,\ g^*_1=a^*_1b^*_3-6b^*_1,$$

$$g^*_2=a^*_1b^*_4-6b^*_2,\ g^*_3=a^*_1,\ g^*_4=12b^*_4,\ g^*_5=30.$$

从此导出

$$72g^*_0=g^*_3(g^*_3g^*_4-12g^*_2),$$

或改写成

$$2G^2_5=5G_3(5G_3G_4-2G_2G_5). \tag{3.32}$$

可是这种关系有时就不一定会存在. 例如在 $n=7$, $h=2$ 的情况下, 作者算出

$$g^*_0=a^*_1b^*_2-a^*_2b^*_1,\ g^*_1=a^*_1b^*_3,$$

$$g^*_2=a^*_2b^*_3+a^*_1b^*_4-24b^*_1,$$

$$g^*_3=a^*_2b^*_4+a^*_1b^*_5-48b^*_2,$$

$$g^*_4=3a^*_2b^*_5+a^*_1b^*_6-48b^*_3,$$

$$g^*_5=4a^*_2b^*_6+a^*_1,$$

$$g^*_6=5(24b^*_5-a^*_2).$$

$$g^*_7=336b^*_6,\ g^*_8=672.$$

这时, 象(3.32)一类的关系不存在. 这就是说, 任意给定了 $G_r(r=1, 2, \cdots, 8)$, 除了参数位移 $(c=1)$ 和仿射变换以外, 可以决定若干根七次有理整曲线 $(h=2)$ 使这些 G_r 是它的八个相对仿射不变量.

综合起来，我们得到

定理 凡满足条件(3.2)的 $n(\geqslant 3)$ 次有理整曲线，必具有 $(2n-h-4)$ 个拐点和同个数的相对仿射不变量；但是当 $h=0$ 或 $n-3$ 时，其中必有一个恒为零，而且当 $0<h<n-3$ 时，这些不变量之间还可能存在函数关系.

3.3 举 例

为了便于应用，我们除了对 $n=3$ 时已经在第三章作出不变量的具体表示以外，在这里还要列举四次和五次有理整曲线（其中 $h=0$）的相对仿射不变量的表示.

1. $n=4$

令 $\lambda=\dfrac{p_{2,4}}{p_{3,4}}$. 对应的方程(3.17)是

$$\begin{cases} x^*=t^{*3}+(*)+a_1^*t^*, \\ y^*=\dfrac{1}{4!}t^{*4}+\dfrac{1}{3!}b_3^*t^{*3}+\dfrac{1}{2}b_2^*t^{*2}+b_1^*t^*, \end{cases} \tag{3.33}$$

式中

$$\begin{cases} a_1^*=3\left(2\dfrac{p_{1,4}}{p_{3,4}}-\lambda^2\right), \\ b_1^*=\dfrac{b_1}{b_4}-\dfrac{b_2}{b_4}\lambda+\dfrac{1}{2}\dfrac{b_3}{b_4}\lambda^2-\dfrac{1}{6}\lambda^3, \\ b_2^*=\dfrac{b_2}{b_4}-\dfrac{b_3}{b_4}\lambda+\dfrac{1}{2}\lambda^2, \\ b_3^*=\dfrac{b_3}{b_4}-\lambda. \end{cases} \tag{3.34}$$

从此得出

$$\begin{cases} G_1=\dfrac{a_1^*b_3^*-6b_1^*}{a_1^*b_2^*}, \\ G_2=\dfrac{a_1^*-6b_2^*}{a_1^*b_2^*}, \\ G_3=0, \\ G_4=\dfrac{12}{a_1^*b_2^*}. \end{cases} \tag{3.35}$$

2．$n=5$

令 $\mu=\frac{p_{3,5}}{p_{4,5}}$. 对应的方程(3.17)是

$$\begin{cases} x^*=t^{*4}+(*)+\frac{1}{2}a_2^*t^{*2}+a_1^*t^*, \\ y^*=\frac{1}{5!}t^{*5}+\frac{1}{4!}b_4^*t^{*4}+\frac{1}{3!}b_3^*t^{*3}+\frac{1}{2}b_2^*t^{*2}+b_1^*t^*, \end{cases} \tag{3.36}$$

式中

$$\begin{cases} a_1^*=8\left(3\frac{p_{1,5}}{p_{4,5}}-3\frac{p_{2,5}}{p_{4,5}}\mu+\mu^3\right), \\ a_2^*=12\left(\frac{p_{2,5}}{p_{4,5}}-\mu^2\right); \\ b_1^*=\frac{b_1}{b_5}-\frac{b_2}{b_5}\mu+\frac{1}{2}\frac{b_3}{b_5}\mu^2-\frac{1}{3!}\frac{b_4}{b_5}\mu^3+\frac{1}{4!}\mu^4, \\ b_2^*=\frac{b_2}{b_5}-\frac{b_3}{b_5}\mu+\frac{1}{2}\frac{b_4}{b_5}\mu^2-\frac{1}{12}\mu^3, \\ b_3^*=\frac{b_3}{b_5}-\frac{b_4}{b_5}\mu+\frac{1}{2}\mu^2, \\ b_4^*=\frac{b_4}{b_5}-\mu. \end{cases} \tag{3.37}$$

从此得出

$$\begin{cases} G_1=\frac{a_1^*b_3^*}{a_1^*b_2^*-a_2^*b_1^*}, & G_4=\frac{3a_2^*-36b_3^*}{a_1^*b_2^*-a_2^*b_1^*}, \\ G_2=\frac{a_2^*b_3^*+a_1^*b_1^*-18b_1^*}{a_1^*b_2^*-a_2^*b_1^*}, & G_5=0, \\ G_3=\frac{2a_2^*b_4^*+a_1^*-36b_2^*}{a_1^*b_2^*-a_2^*b_1^*}, & G_6=\frac{90}{a_1^*b_2^*-a_2^*b_1^*}. \end{cases} \tag{3.38}$$

§4　高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量

我们现在考察在m维仿射空间里各个非齐次坐标$x_p(p=1, 2, \cdots, m)$都是由某参数t的n次多项式表成的曲线，即有理整曲线．特别是，在平面场合$(m=2)$，我们如取$n=3$或5，就得到第

三章所述的三次参数曲线或本章 § 2 讨论的五次参数曲线.

我们将证明下列

定理　m 维仿射空间 $n(>m>2)$ 次参数曲线一般具有 $m(n-m)-2$ 个内在仿射不变量(苏步青，忻元龙，1980).

证明　按定义，C_n 的方程是

$$(E)\quad \boldsymbol{x}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\boldsymbol{a}_i t^i \quad (n>m\geqslant 2),$$

式中　$\boldsymbol{x}=(x_p)$, $\boldsymbol{a}_i=(a_{p_i})$　$p=1,\ 2,\ \cdots,\ m$; $i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$.

作讯拐点方程

$$(F)\quad f(t)\equiv\det\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\ \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}\cdots\frac{d^m\boldsymbol{x}}{dt^m}\right|=0,$$

并令

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_m}=\det|\boldsymbol{a}_{i_1}\boldsymbol{a}_{i_2}\cdots\boldsymbol{a}_{i_m}|,$$

$$0\leqslant i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m\leqslant n,$$

把 $f(t)$ 展开为 t 的多项式

$$f(t)=A_0+A_1t+\cdots\frac{1}{N!}A_Nt^N,$$

容易知道 $N=m(n-m)$.

又令

$$R=\frac{p_{n-m,\,n-m+2,\,\cdots,\,n}}{p_{n-m+1,\,n-m+2,\,\cdots,\,n}},$$

并作出

$$F(t^*)\equiv f(t^*-R),$$

我们改写方程 (F) 为

$$(F^*)\quad \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}g_k^*t^{*k}=0,$$

式中已假定 $g_0^*=f(-R)\neq 0$, 因此，我们得到

$$1+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}G_k^*t^{*k}=0,$$

其中

$$G_k^*=\frac{g_k^*}{g_0^*}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N).$$

下面我们将证明:

$$g_N^* = \frac{n!N!}{(n-m)!}\prod_{p=1}^{m}(m-p)!, \quad g_{N-1}^* \equiv 0.$$

我们最终的目的是证明：在 $G_1^* \neq 0$ 的假定下，

$$I_r \equiv G_r^*/(G_r^*)^r, \ r=2, \ \cdots, \ N-2, \ N$$

就是所求的 $N-2$ 个内在仿射不变量.

为此，我们考察这个空间最一般正则仿射变换 A：

$$\bar{x}_r = \sum_{s=1}^{m} a_{rs}x_s + a_{r0}, \ r=1, \ 2, \ \cdots, \ m,$$

其中 $J \equiv \det|a_{rs}| \neq 0$.

与此同时，考察参数 t 的一般线性变换 T：

$$t = c\bar{t} + f \quad (c \neq 0),$$

曲线 C_n 的参数方程(E)经过这些变换变成

$$(\bar{E}) \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\bar{\boldsymbol{a}}_j\bar{t}^j,$$

进行简单计算，便有：

$$\bar{a}_{rj} = c^j \sum_{s=1}^{m} a_{rs} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{(i-j)!} a_{si} f^{i-j} + \delta_{0j}a_{r0},$$

$$j=0, \ 1, \ \cdots, \ n,$$

$$r=1, \ \cdots, \ m.$$

下文中，我们仅需要计算 $j \neq 0$ 时的 $\bar{a}_{rj}$，因此作如下的规定：

$$i, \ j, \ l=1, \ 2, \ \cdots, \ n,$$

$$p, \ r, \ s=1, \ 2, \ \cdots, \ m.$$

令 $$A_{sj} = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{(i-j)!} a_{si} f^{i-j},$$

我们就有： $$\bar{a}_{rj} = c^j \sum_{s=1}^{m} a_{rs} A_{sj}.$$

如果用(a_{rs})和(A_{sj})分别表示 $m \times m$ 矩阵和 $m \times n$ 矩阵，那末

$$(\bar{a}_{rj}) = c^j (a_{rs})(A_{sj}),$$

左边表示 $m \times n$ 矩阵.

从定义和上列关系可以看出

$$\bar{P}_{j_1,j_2,\cdots,j_m}=C^j\cdot J\cdot P_{j_1,j_2,\cdots,j_m}\quad\left(j=\sum_{r=1}^{m}j_r\right).$$

式中，如同 $p\cdots$ 的定义一样，

$$P_{j_1,j_2,\cdots,j_m}\equiv\det|A_{s,j_1}A_{s,j_2}\cdots A_{s,j_m}|.$$

我们特别地算出 $\bar{P}_{n-m+1,n-m+2,\cdots,n}$ 和 $\bar{P}_{n-m,n-m+2,\cdots,n}$.

从 $A_{s,j}$ 的定义得出

$$A_{s,n}=a_{s,n},$$

$$A_{s,n-1}=a_{s,n-1}+a_{s,n}f,$$

$$A_{s,n-2}=a_{s,n-2}+a_{s,n-1}f+\frac{1}{2!}a_{s,n}f^2,$$

……………………………………………

$$A_{s,n-m+2}=a_{s,n-m+2}+a_{s,n-m+3}f+\cdots+\frac{1}{(m-2)!}a_{s,n}f^{m-2},$$

$$A_{s,n-m+1}=a_{s,n-m+1}+a_{s,n-m+2}f+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}a_{s,n}f^{m-1},$$

$$A_{s,n-m}=a_{s,n-m}+a_{s,m-n+1}f+\cdots+\frac{1}{m!}a_{s,n}f^{m}.$$

因此，

$$\bar{P}_{n-m+1,n-m+2,\cdots,n}=c^{\rho}\cdot J\cdot P_{n-m+1,n-m+2,\cdots,n},$$

$$\bar{P}_{n-m,n-m+2,\cdots,n}=c^{\rho-1}\cdot J\cdot[P_{n-m,n-m+2,\cdots,n}$$
$$+fP_{n-m+1,n-m+2,\cdots,n}],$$

其中 $$\rho=\frac{1}{2}m(2n-m+1).$$

我们记 $$R=\frac{P_{n-m,n-m+2,\cdots,n}}{P_{n-m+1,n-m+2,\cdots,n}}$$

和对应的 $\bar{R}$，便可改写上列关系为

$$\bar{R}=\frac{1}{c}(R+f).$$

我们定义 $t^*=t+R$ 为 t 的归范参数，同样定义 $\bar{t}^*=\bar{t}+\bar{R}$ 为 $\bar{t}$ 的归范参数，那末上列关系给出

$$\bar{t}^* = \frac{1}{c} t^*.$$

如果我们能证明 $A_{N-1}/A_N = R$，那末，用 $\frac{1}{c} t^*$ 代替汛拐点方程

$$(\bar{F}^*) \quad 1 + \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r!} \bar{G}_r^* \bar{t}^{*r} = 0$$

中的 t^* 并与 (F^*) 相比较，便获得

$$\bar{G}_r^* = c^r G_r^* \quad (r = 1, 2, \cdots, N),$$

从而得出内在的仿射不变量 $I_r \equiv G_r^* / (G_1^*)^r$，其中 $r = 2, 3, \cdots, N$.

为了这个目的，我们假定 $P_{n-m+1, n-m+2, \cdots, n}$ 和其由下而上的 1 阶、2 阶、…、$(m-1)$ 阶小主对角线行列式都不等于 0. 这时，存在唯一的仿射变换(归范变换)

$$A^*: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^*, \quad \det|A^*| \neq 0$$

和归范参数变换

$$T^*: \ t = t^* - R,$$

使得(E)变为它的归范方程组

$$(E^*) \quad x_p^* = \sum_{i=1}^{n-m+p} \frac{1}{i!} a_{p,i}^* t^{*i},$$

其中
$$a_{p,n-m+p}^* = (n-m+p)!, \ a_{1,n-m}^* = 0,$$
$$p = 1, 2, \cdots, m.$$

这样一来，汛拐点方程(F)变为

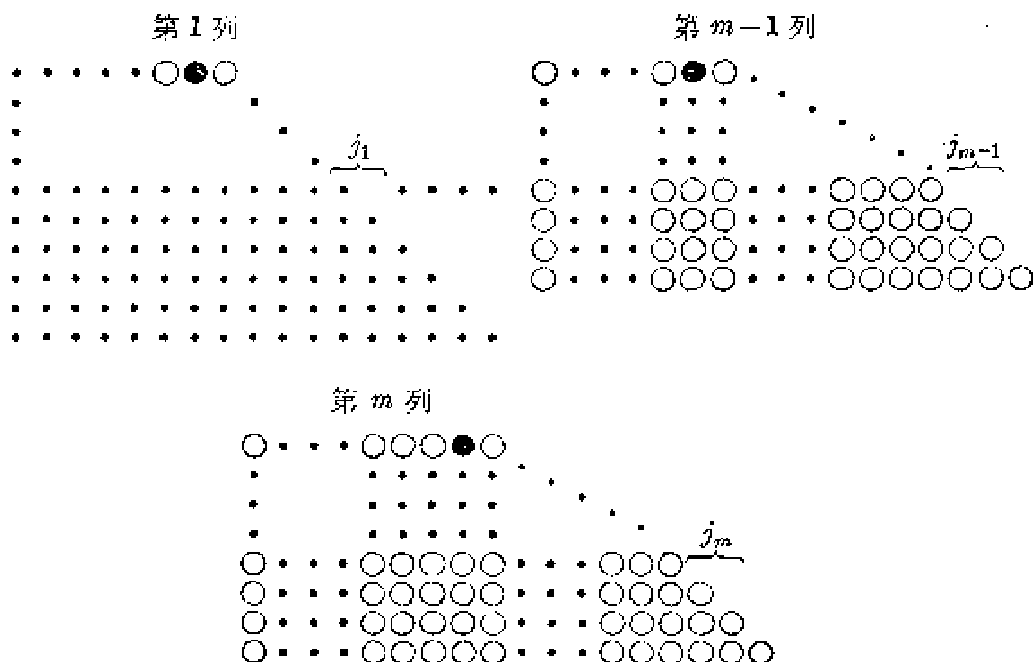
$$(F^*) \quad \det\left| \frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt^*} \frac{d^2\boldsymbol{x}^*}{dt^{*2}} \cdots \frac{d^m\boldsymbol{x}^*}{dt^{*m}} \right| = 0,$$

或者展开为前面的形式

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} g_k^* t^{*k} = 0.$$

剩下的问题是算出两系数 g_N^* 和 g_{N-1}^*.

现在，把(F^*)的左边行列式的 m 个列象征性地表示为下图：



图中，每一列里用处在同一行的小圆圈串表示 t^* 的一个多项式，各项的次数从右到左递降为 0 次．在顶上的各串中都有一个实心小圆，它处于各串末尾第二个位置，表示一个缺项（因为 $a^*_{1,n-m}=0$）．取第 m 列为例来说，第 m 串表示 $\frac{d^m x^*_m}{dt^{*m}}$ 的各项，t^* 的次数从右到左分别是 $n-m,\ n-m-1,\ \cdots,\ 0$；而且在这列里处在同一条铅直线上的各项都有同一次数．比方说，从右侧数起处在第 j_m 条铅直线上的各项都是 $n-m-j_m+1$ 次．这里，$j_m=1,\ 2,\ \cdots$，或 m．这条铅直线只有从下到上的 j_m 个项不是 0，其余 $m-j_m$ 个项都是缺项．顶上的项是

$$T_{m,j_m}=\frac{(n-j_m+1)!}{(n-m-j_m+1)!}t^{*n-m-j_m+1},$$

当 j_m 顺次取值 $1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 时，这些非零项形成了一个以 m 个小圆圈为等边的等腰三角形，如前图所示．

这个举例完全适用于任何一列．就是说，对于第 μ 列来说，考察它从右侧向左数到第 j_μ 条铅直线上的各非零项，其顶上的项是

$$T_{\mu,j_\mu}=\frac{(n-j_\mu+1)!}{(n-\mu-j_\mu+1)!}t^{*n-\mu-j_\mu+1}\quad(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ m).$$

必须指出，如果 $j_\mu=j_\nu$ 而 $\mu\neq\nu$，那末，这两排在同一行上的两对应项成比例，于是以这两排（包括各排上方的零项在内）和其他 $m-2$ 排拼成的 m 阶行列式必恒为 0.

现在，我们已无多大困难来找 g_N^* 或 $A=\frac{1}{N!}g_N^*$ 了.

实际上，要使 t^* 的最高次数 N 出现，势必要从每一个有关的等腰三角形（见前图）挑选那条铅直线，而且对于 $\mu\neq\nu$ 必须是 $j_\mu\neq j_\nu$. 因此 $(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ 必须是 $(1, 2, \cdots, m)$ 的一个排列. 我们按照置换

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{m-1} & j_m \\ m+1-j_1 & m+1-j_2 & \cdots & m+1-j_{m-1} & m+1-j_m \end{pmatrix}$$

是偶或奇而用 $\sigma(j_1, j_2, \cdots, j_m)$ 表示 $+1$ 或 -1. 这样一来，从上述的 m 条铅直线拼成的 m 阶行列式等于

$$\sigma(j_1, j_2, \cdots, j_m)T_{1,j_1}T_{2,j_2}\cdots T_{m,j_m}.$$

又从
$$\sum_{\mu=1}^{m}(n-\mu-j_\mu+1)=m(n-m)=N$$

得知最高次项是 At^{*N}，即：

$$\sum\sigma(j_1, j_2, \cdots, j_m)T_{1,j_1}T_{2,j_2}\cdots T_{m,j_m}$$
$$(j_1, j_2, \cdots, j_m)=(1, 2, \cdots, m).$$

因此，

$$A=\sum\sigma(j_1, j_2, \cdots, j_m)\frac{(n-j_1+1)!\,(n-j_2+1)!\cdots(n-j_m+1)!}{(n-j_1)!\,(n-j_2-1)!\cdots(n-m-j_m+1)!}$$
$$(j_1, j_2, \cdots, j_m)=(1, 2, \cdots, m).$$

我们容易导出 A 的行列式表示：

$$D_m^{m(n-m)}=\begin{vmatrix} \frac{(n-m+1)!}{(n-m)!} & \frac{(n-m+1)!}{(n-m-1)!} & \cdots & \frac{(n-m+1)!}{(n-2m+1)!} \\ \frac{(n-m+2)!}{(n-m+1)!} & \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} & \cdots & \frac{(n-m+2)!}{(n-2m+2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n!}{(n-1)!} & \frac{n!}{(n-2)!} & \cdots & \frac{n!}{(n-m)!} \end{vmatrix}.$$

用直接运算或归纳法可证:

$$D_m^{m(n-m)}=\frac{n!}{(n-m)!}\prod_{\nu=1}^{m}(m-p)!$$

这样,我们获得

$$g_N^*=\frac{N!n!}{(n-m)!}\prod_{p=1}^{m}(m-p)!.$$

其次,我们转到高次项 Bt^{*N-1} 的计算. 结果是 $B=0$, 也即 $g_{N-1}^*=0$.

为阐明这个事实,只要看一看这次高次项是怎样形成的. 从以上求 A 的过程中明显地看出,在那些 $j_1, j_2, \cdots, j_m$ 中必须有两个相等. 如果它们都小于 m, 如前所述,所拼成的行列式一定是0. 如果 $j_\mu=m$, 那末用以代替第 μ 列第 m 铅直线的就是它的左邻铅直线,但是后一铅直线的顶上项是缺项,即前图中的实心小圆. 这项和其全对应于 j_μ 除外的 $m-1$ 项相乘,当然等于0. 这样,证明了 $B=0$.

最后,我们指出求不变量的捷径.

设
$$f(t)=\det\left|\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2}\cdots\frac{d^mx}{dt^m}\right|,$$
$$F(t^*)=f(t^*-R).$$

那末,在假定 $F(0)\neq 0$ 之下,方程

$$\frac{1}{F(0)}F(t^*)=0$$

恰恰重合 $1+\sum_{r=1}^{N}G_rt^{*r}=0$.

参考文献

Adams, J. A.

[1] Geometric concepts for computer graphics, AD-750743, 1972.

[2] Cubic spline curve fitting with controlled end conditions, CAD① 6 (1974), 2～9.

[3] The intrinsic method for curve definition, CAD 7 (1975), 243～249.

Ahlberg, J. H.

[1] Spline approximation and computer-aided design, Advances in Computers, 10 (1970), 275～290.

[2] The spline approximation as an engineering tool, Computer Aided Engineering, G. M. L. Gladwell, ed., 1971, 1～18.

[3] Cardinal splines on the real line, J. Approx. Theory 5 (1972), 428～437.

Ahlberg, J. H., and Nilson, E. N.

Convergence properties of the spline fit, J. Soc. Indust. Appl. Math. 11(1963), 95～104.

Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., and Walsh, J. L.

The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, 1967.

Ahuja, D. V.

An algorithm for generating spline-like curves, IBM Systems J. 7 (1968), 206～217.

Ahuja, D. V., and Coons, S. A.

Interactive graphics in data processing, geometry for construction and display, IBM Systems J. 7 (1968), 188～205.

Akima, H.

[1] A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, J. ACM 17 (1970), 589～602.

[2] A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedures, Comm. ACM 17 (1974), 18～20, 26～31.

① CAD是英国Computer Aided Design杂志的缩写，下同。

[3] A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points, ACM Trans. Math. Software 4 (1978), 148~159.

Alft W. E., and Collatz, G.

Computer aided design of ship's lines by nonlinear distortion of parent forms, Computer Applications in Automation of Shipyard Operation and Ship Design II, 1976.

Anderson, W. L.

Application of bicubic spline functions to two-dimensional gridded data, U.S. Geological Survey Rpt. GD-71-022, 1971.

Armit, A. P.

[1] Computer systems for interactive design of three-dimensional shaper, Cambridge University Ph. D. Thesis, 1970.

[2] Curve and surface design using multipatch and multiobject design systems, CAD 3 (1971).

Ball, A. A.

[1] CONSURF Part 1: Introduction of the conic lofting tile, CAD 6(1974), 243~249.

[2] CONSURF Part 2: Description of the algorithms, CAD 7(1975), 237~242.

[3] CONSURF Part 3: How the program is used, CAD 9 (1977), 9~18.

[4] A simple specification of the parametric cubic segment, CAD 10(1978), 181~182.

Barnhill, R. E.

[1] Smooth interpolation over triangles, CAGD①, 1974, 45~70.

[2] Representation and approximation of surfaces, Mathematical Software III, J. R. Rice ed., Academic Press, 1977, 69~120.

Barnhill, R. E., Birkhoff, G., and Gordon, W. J.

Smooth interpolation in triangles, J. Approx. Theory, 8 (1973), 114~128.

Barnhill, R. E., and Gregory, J. A.

Compatible smooth interpolation in triangles, J. Approx. Theory, 15 (1975), 214~225.

Barnhill, R. E., and Riesenfeld, R. F. (eds)

Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.

北京航空学院等编

飞机外形计算的数学基础，国防工业出版社，1978.

Bezier, P. E.

① CAGD是下述论文集的缩写，下同：Barnhill, R. E., and Riesenfeld, R. F., (eds), Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.

[1] *Numerical Control-Mathematics and Applications*, John Wiley and Sons, 1972.

[2] Numerical control in automobile design and manufacture of curved surfaces, Curved Surfaces in Engineering, IPC Science and Technology Press, 1972.

[3] Mathematical and Practical Possibilities of UNISURF, CAGD, 1974, 127～152.

[4] Essai de definition numérique des courbes et des surfaces paramétriques, Thesis, University of Pierre et Marie Curie, Paris, 1977.

[5] General distortion of an ensemble of biparametric surfaces, CAD 10 (1978), 116～120.

Bhattacharyya, B. K.

Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data, Geophysics, 34 (1969), 402～423.

Birkhoff, G., and deBoor, C.

[1] Error bounds for cubic spline interpolation, J. Math. Mech. 13(1964), 827～835.

[2] Piecewise polynomial interpolation and approximation, See *Approximation of Functions*, H. L. Garabedian, ed., 1965, 164～190.

Birkhoff, G., Burchard, H., and Thomas, D.

Nonlinear interpolation by splines, pseudo-splines, and elastica, Res. Publ. General Motors Research, 468, 1965.

Birkhoff, G., and Garabedian, H. L.

Smooth surface interpolation, J. Math. Phys., 39 (1960), 258～268.

Böhm, W.

Über die Konstruktion Von B-Spline Kurven, Computing, 18 (1977), 161～166.

Böhmer, K., Meinardus, G., and Schempp, W., (eds)

Spline Functions, Lecture Notes 501, Springer-Verlag, 1976.

Bolton, K. M.

Biarc curves, CAD 7 (1975), 89～92.

deBoor, C.

[1] Bicubic spline interpolation, J. Math. and Phys., 41 (1962), 212～218.

[2] On calculating with B-splines, J. Approx. Theory, 6 (1972), 50～62.

[3] Package for calculating with B-splines, MRC TSR #1333 (1973); SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), 441～472.

[4] Splines as linear combinations of B-splines, a survey, See *Approx. Theory* II (Lorentz, G. G., ed.), Academic Press, 1976, 1～47.

[5] *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, 1978.

[6] A taut cubic spline, 1980, to appear.

deBoor, C., and Lynch, R. E.

On splines and their minimum properties, J. Math. Mech., 15 (1966), 953~969.

Burau, P. W.

Algebraische Kurven und Flächen, Sammlung Göschen Bd., 435, I, 1962.

C. A. D. Centre

An Introduction to Numerical Master Geometry, Computer Aided Design Centre, Cambridge, 1972.

Cadwell, J. H., and Williams, D. E.

Some orthogonal methods of curve and surface fitting, Comput. J., 4 (1961).

Carlson, R. E., and Hall, C. A.

Bicubic spline interpolation in rectangular polygons, J. Approx. Theory, 6 (1972), 366~377.

Catmull, E., and Clark, J.

Recursively generated B-spline surface on arbitrary topological meshes, CAD 10 (1978), 350~355.

Catmull, E., and Rom., R.

A class of local interpolating splines, CAGD, 1974, 317~326.

常庚哲

Coons 曲面介绍,计算机应用与应用数学, 1977 年第 12 期, 1~24.

常庚哲,吴骏恒

贝齐尔曲线曲面的数学基础及其计算,北京航空学院科研报告 BH-B 331, 1978.

Cheney, E., and Schurer, F.

Convergence of cubic spline interpolation, J. Approx. Theory, 3 (1970), 114~116.

Clark, J. H.

[1] Some properties of B-splines, Second USA-Japan Computer Conf. Proc., 1975, 542~545.

[2] Designing surfaces in 3-D, Commun. ACM, 19 (1976), 454~460.

Clenshaw, C. W., and Hayes, J. G.

Curve and surface fitting, J. Inst. Math. Appl., 1 (1965), 164~183.

Cline, A. K.

Scalar-and planar-valued curve fitting using splines under tension, Commun. ACM, 17 (1974), 218~220.

Coons, S. A.

[1] Surfaces for computer-aided design of space figures, Mech. Eng. Depat., MIT, 1964.

[2] Surfaces for computer-aided design of space forms, AD-663504, 1967.

[3] Surface patches and B-spline curves, CAGD, 1974, 1~16.

[4] Modification of the shape of piecewise curves, CAD, 9 (1977), 178~180.

Cox, M. G.

The numerical evaluation of B-splines, J. Inst. Math. Appl., 10 (1972), 134～149.

Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н.

СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ, 1976, Москва.

Curry, H. B., and Schoenberg, I. J.

On Pólya frequency functions IV. The fundamental spline functions and their limits, J. d'Analyse Math., 17 (1966), 71～107.

Dahlquist, G.

Numerical Methods, 1974.

Davis, P. J.

Interpolation and Approximation, Ginn-Blaisdell Publ. Co., 1963.

Delvos, F. J.

On surface interpolation, J. Approx. Theory, 15 (1975), 209～213.

Dimsdale, B.

[1] Bicubic patch bounds, Comp. & Maths. with Appls., 3 (1977), 95～104.

[2] Convex cubic splines, IBM J. Res. Develop., 22 (1978), 168～178.

Dimsdale, B., and Burkley, R. M.

Bicubic patch surfaces for high-speed numerical control processing, IBM J. Res. Develop., 20 (1976), 358～367.

Dimsdale, B., and Johnson, K.

Multiconic surfaces, IBM J. Res. Develop., 19 (1975), 523～529.

董光昌等

船体数学放样——回弹法，科学出版社，1978.

董光昌，梁友栋，何援军

样条曲线拟合与双圆弧逼近，应用数学学报，1 (1978), 330～340.

Earnshaw, J. L., and Yuille, I. M.

A method of fitting parametric equations for curves and surfaces to sets of points defining them approximately, CAD, 3 (1971), 19～22.

Ellis, T. M. R., and Mclain, D. H.

Algorithm 514. A new method of cubic curve fitting using local data, ACM Trans. Math. Software, 3 (1977), 175～179.

Epstein, M. P.

On the influence of parametrisation in parametric interpolation, SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 261～268.

Faux, I. D.

Simple cross-sectional designs based on Bézier patch surfaces and a comparison with indirect Bézier methods and traditional proportional development methods, Conference on Computer Aided Manufacture, June 1978, 20～22.

Faux, I. D., Pratt, M. J., and Wiley, J.

Computational Geometry for Design and Manufacture, New York, 1979.

Ferguson, J.

Multivariable curve interpolation, J. ACM 11 (1964), 221～328.

Fisher, S. D.

Some nonlinear variational problems, See *Approx. Theory*, II (G. G. Lorentz, ed.), 1976, 357～363.

Flutter, A. G., and Rolph, R. N.

POLYSURF: An interactive system for computer-aided design and manufacture of components, CAD 76 Proceedings, 150～158.

Forrest, A. R.

[1] Curves and surfaces for computer-aided design, Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1968.

[2] Computational geometry, Proc. Roy. Soc. London A 321, 1971, 187～195.

[3] Coons surfaces and multivariable functional interpolation, Cambridge University CAD Group Doc., December 1971.

[4] On Coons and other methods for the representation of curved surfaces, Computer Graphics and Image Processing 1 (1972), 341～359.

[5] Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials, Computer J., 15 (1972), 71～79.

[6] Computational geometry-achievements and problems, CAGD, 1974,17～44.

[7] Recent trends in CAGD, Proc. Conf. on Interactive Techniques in CAD, Bologna, September 1978.

[8] Lecture Notes on Computer-Aided Geometric Design and Computational Geometry, University of East Anglia, 1978.

[9] The twisted cubic curve: A computer-aided geometric design approach, University of East Anglia, July 1979.

[10] On the rendering of surface, University of East Anglia, 1979.

Fowler, A. H., and Wilson, C. W.

Cubic spline, a curve fitting routine, Report Y-1400, Oak Ridge, 1963.

复旦大学数学系编

曲线与曲面，科学出版社，1977.

复旦大学数学系，江南造船厂

[1] 单根曲线光顺的基样条法，江南造船厂技术资料，1974年7月.

[2] 关于点点通过的算法，江南造船厂技术资料，1974年8月.

[3] 艏部线型光顺，江南造船厂技术资料，1976年4月.

Glass, J. M.

Smooth-curve interpolation: A generalized spline-fit procedure, BIT 6 (1966), 277～293.

Godwin, A. N.

Family of cubic splines with one degree of freedom, CAD 11 (1979), 13~18.

Gordon, W. J.

[1] Spline-blended surface interpolation through curve networks, J. Math. Mech., 18 (1969), 931~952.

[2] Distributive lattices and the approximation of multivariate functions, *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*, I. J. Schoenberg, ed., Academic Press, 1969.

[3] Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation, SIAM J. Numer. Anal., 8 (1971), 158~177.

Gordon, W. J., and Riesenfeld, R. F.

[1] Bernstein-Bézier methods for the computer aided design of free form curves and surfaces, J. ACM 21 (1974), 293~310.

[2] *B*-spline curves and surfaces, CAGD, 1974, 95~126.

Gregory, J. A.

[1] Symmetric smooth interpolation on triangles, TR/34, Brunel Univ. Uxbridge, England, 1973.

[2] Smooth interpolation without twist constraints, CAGD, 1974, 71~87.

Greville, T. N. E., ed.

Theory and Applications of Spline Functions, Academic Press, 1969.

Greville, T. N. E.

Introduction to spline functions, *Theory and Applications of Spline Functions* (Greville, ed.), 1969.

Grossman, M.

Parametric curve fitting, Computer J. 14 (1971), 169~172.

Hall, C. A.

[1] Bicubic interpolation over triangles, J. Math. Mech. 19 (1969), 1~11.

[2] Error bounds for bicubic spline interpolation, J. Approx. Theory, 7 (1973), 41~47.

[3] Natural cubic and bicubic spline interpolation, SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973), 1055~1060.

Hall, C. A., and Meyer, W. W.

Optimal error bounds for cubic spline interpolation, J. Approx. Theory, 16 (1976), 105~122.

Halliday, J., Wall, J. F., and Joyner, W. D.

Report on multivariable curve fitting using fundamental splines, Report No. MSN. 167, British Aircraft, 1972.

Hartley, P. J., and Judd, C. J.

Parametrization of Bézier-type *B*-spline curves and surfaces, CAD 10 (1978), 130~134.

Hayes, J. G.

[1] Numerical methods for curve and surface fitting, Bull. Inst. Math. Applics, 1974.

[2] New shapes from bicubic splines,National Physical Laboratory, NSAC 58, 1974.

Hayes, J. G., and Halliday, J.

The least squares fitting of cubic spline surfaces to general data sets, J. Inst. Maths. Applics., 14 (1974), 89～103.

Holladay, J. C.

Smoothest curve approximation, Math. Tables Aids Computation,11(1957), 233 ～243.

洪都机械厂，武汉大学数学系编

康氏曲面法(飞机机身、进气道数学模型)，1978年5月.

Hosaka, M.(穗坂衛)

[1] Fairing and elastica, Proc. 8th Conf. of Information Processing Soc. of Japan, 1967, 49～50.

[2] Theory and design of free-form surface, Information Processing in Japan, 7 (1967), 54～61.

[3] Theory of curve and surface synthesis and their smooth fitting, Information Processing in Japan, 9 (1969), 60～68.

穗坂衛，黑田満

CAD における曲线曲面の創成について，情报处理 17 (1976), 1120～1127.

Hoskins, N. D., and Penzo, P. J.

Some approximation properties of periodic parametric cubic splines, BIT 14 (1974), 152～156.

沪东造船厂，山东大学船体数学放样研究组

[1] 船体数学放样(沪东造船厂技术资料)，1976.

[2] 单拐曲线样条函数，应用数学学报，1977年第2期，1～11.

[3] 能为曲率单调曲线所通过的点列性质 (I)，山东大学学报，自然科学版，1978年第1期，1～8.

[4] 剖面线法中的一些数学问题(I)——论点点通过某些型值的三次样条曲线总有多余拐点，数学的实践与认识，1979年第1期，50～54.

Ichida, K., Yoshimoto, F., and Kiyono, T.

Curve fitting by a one pass method with a piecewise cubic polynomial, ACM Trans. Math. Software 3 (1977), 164～174.

Inselberg, A.

Cubic splines with infinite derivatives at some knots, IBM J. Res. Develop. 20 (1976), 430～436.

Ishimatsu, Y. et al.

Computer-aided generation of sculptured surfaces, Jl. N. C. April 74, 33～39, (1974).

江南造船厂数学放样课题组

船体数学放样的实践与认识，数学的实践与认识，3 (1971), 19～26.

Kammerer, W. J., Reddien, G. W., and Varga, R. S.

Quadratic interpolatory splines, Numer. Math., 22 (1974), 241～259.

Kershaw, D.

Inequality on the elements of the inverse of a certain tridiagonal metrix, Math. of Computation, 24 (1970), 155～158.

Kuo C.

Computer methods for ship surface design, 1971.

中译本：郭成吉，船体曲面设计的计算机法，国防工业出版社，1977年.

Larkin, F. M.

An interpolation procedure based on fitting elasticas to given data points, Culham Operating System-Note 5/66, Theory Division, Culham Laboratory, 1966.

Lawson, C. L.

Software for C^1 surface interpolation, *Math. Software* III (J. R. Rice ed.), Academic Press, 1977, 161～194.

Lee, E. H., and Forsythe, G. E.

Variational study of nonlinear spline curves, SIAM Rev., 15(1973), 120～133.

Lee, T. M. P.

Analysis of an efficient homogeneous tensor representation of surfaces for computer display, In *Advanced Computer Graphics*, Plenum Press, 1971.

李岳生，黄友谦

数值逼近，人民教育出版社，1978.

李岳生，齐东旭

样条函数方法，科学出版社，1979.

Levin, J.

A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces, Comm. ACM 19 (1976), 555～563.

刘鼎元

[1] 论一类样条曲线的等价性，1978.

[2] 张力样条曲线和凸性分析，1979.

[3] 三次 B 样条曲线的光顺性，1979.

[4] 三次参数曲线段和三次 Bézier 曲线形状控制，1980.

[5] 平面 n 次 Bézier 曲线的凸性定理，1980.

刘鼎元，苏文荣

[1] 局部三次曲线和双圆弧样条，沪东技术情报（沪东造船厂），1980年第2期，17～28.

[2] 船体舯部线型的三向光顺法和艏艉部光顺法（沪东造船厂技术资料），1979.

六机部第十一研究所数学放样组

[1] 样条函数在船体线型和数控绘图中的应用，1978年6月.

[2] 基样条的线性规划光顺法，1978年6月.

Love, A. E. H.

The mathematical theory of elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1934.

MacCallum, K. J.

Mathematical design of hull surfaces, The Naval Architect, July 1972, 359~373.

MacLaren, D. H.

Formulas for fitting a spline curve through a set of points, Boeing Appl. Math. Report 2, 1958.

Malcolm, M. A.

On the computation of nonlinear spline functions, SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977), 254~282.

Manning, J. R.

Continuity conditions for spline curves, Computer J., 17 (1974), 181~186.

Mansfield, L.

Higher order compatible triangular finite elements, Numer. Math. 22 (1974), 89~97.

Marsden, M. J.

Quadratic spline interpolation, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 903~906.

McAllister, D. F., Passow, E., and Roulier, J. A.

Algorithems for computing shape preserving spline interpolations to data, Mathematics of Computation, 139 (1977), 717~725.

McAllister, D. F., and Roulier, J. A.

Interpolation by convex quadratic splines, Math. Comp., 1980, to appear.

Mehlum, E.

[1] Curve and surface fitting based on variational criteriae for smoothness, Central Institute for Industrial Research, Oslo, Norway, 1969.

[2] Nonlinear splines, CAGD, 1974, 173~207.

Mehlum, E., and Sorensen, P. F.

Example of an existing system in the ship-building industry: the AUTOKON system, Proc. Roy. Soc. London, A 321 (1971), 219~233.

Minsky, M., and Papert, S.

An Introduction to Computational Geometry, MIT Press, 1969.

Munchmeyer, F. C., and Lau, G. K. H.

On the interactive design of smooth patched surfaces, Proceedings International Conference on Interactive Techniques in Computer Aided Design, 1978.

Munchmeyer, F. C., Schubert, C., and Nowacki, H.

Interactive design of fair hull surfaces using B-splines, Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design III, 1979.

Nielson, G. M.

Some piecewise polynomial alternatives to splines under tension, CAGD, 1974, 209～235.

Nutbourne, A. W.

A cubic spline package: Part 2-the mathematics, CAD 5 (1973), 7～13.

Nutbourne, A. W., McLellan, and Kensit

Curvature profiles for plane curves, CAD 4 (1972), 176～184.

Nutbourne, A. W., Morus, R. B., and Hollins, C. M.

A cubic spline package: Part 1-the user's guide, CAD 4 (1972), 228～238.

Okada, Y.

A numerical experiment on the fairing free-form curves, Information Processing in Japan, 9 (1969), 69～74.

Overhauser, A. W.

Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending, Technical Report No. SL 68～40, Ford Motor Company Scientific Laboratory, 1968.

Pal, T. K., and Nutbourne, A. W.

Two-dimensional curve synthesis using linear curvature elements, CAD 9(1977), 121～134.

Pal, T. K.

[1] Intrinsic spline curve with local control, CAD 10 (1978), 19～29.

[2] Mean tangent rotational angles and curvature integration, CAD 10 (1978), 30～34.

潘承洞

Spline 函数的理论及其应用(一)—(四)，数学的实践与认识，1975年第3期～1976年第2期连载.

Passow, E.

[1] Piecewise monotone spline interpolation, J. Approx. Theory, 12 (1974), 240～241.

[2] Monotone quadratic spline interpolation, J. Approx. Theory, 19 (1977), 123～134.

Passow, E., and Roulier, A.

Monotone and convex spline interpolation, SIAM J. Numer. Anal., 14 (1977).

Peters, G. J.

Interactive computer graphics application of the parametric bi-cubic surface to engineering design problems, CAGD, 1974, 259～302.

Pilcher, D. T.

Smooth parametric surfaces, CAGD, 1974, 237～253.

Podolsky, B., and Denman, H. H.

Conditions on minimization criteria for smoothing, Math. Comput., 18 (1964), 441～448.

Powell, M. J. D.

Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting, *Software for Numerical Analysis* (D. J. Evans, ed.), Academic Press, 1974, 253～271.

Prenter, P. M.

Splines and Variational Methods, Wiley-Interscience, 1975.

Pruess, S.

Properties of spline in tension, J. Approx. Theory, 17 (1976), 86～96.

齐东旭，田自贤，张玉心，冯家斌

曲线拟合的数值磨光方法，数学学报 18 (1975), 173～184.

Riesenfeld, R. F.

[1] Applications of B-spline approximation to geometric problems of computer-aided design, Ph. D. Thesis at Syracuse University (1972). Published as University of Utah, UTEC-CSc-73-126, (1972).

[2] Nonuniform B-spline curves, Proc. 2nd USA-Japan Computer Conference, 1975, 551～555.

Ris, G.

Raccordement à l'ordre N entre carreaux de surfaces définis par des polynomes biparamétriques à coefficients vectoriels. Application aux surfaces UNISURF, These Université de Nancy, (April 1975).

Rogers, D. F., and Adams, J. A.

Mathematical elements for computer graphics, McGraw-Hill, 1976.

Sabin, M. A.

[1] Spline surface, British Aircraft Corporation, 1969.

[2] Parametric splines in tension, British Aircraft Corporation, 1970.

[3] The British Aircraft Corporation Numerical Master Geometry System, Proc. Roy. Soc. London A 321 (1971), 197～205.

[4] A method for displaying the intersection curve of two quadric surfaces, Comput. J., 19 (1976), 336～338.

[5] The use of piecewise forms for the numerical representation of shape, Ph. D. Thesis, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Report 60/1977, 1977.

Sablonniére, P.

[1] Splines et base de Bernstein, Polygones associés à fonction-spline et applications UER de Mathématiques, Université de Lille I Publications, No. 109, 112, 123 (1977).

[2] Spline and Bézier polygons associated with a polynomial spline curve, CAD 10 (1978), 257～261.

Sadeghi, M. M., and Gould, S. S.

A comparison of two parametric surface patch methods, CAD 6 (1974), 217～220.

Sard, A., and Weintraub, S.

A Book of Splines, Wiley, New York, 1971.

Schechter, A.

[1] Synthesis of 2D curves by blending piecewise linear curvature profiles, CAD 10 (1978), 8～18.

[2] Linear blending of curvature profiles, CAD 10 (1978), 101～109.

Schoenberg, I. J.

[1] Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Quart. Appl. Math., 4 (1946), 45～99, 112～141.

[2] On variation diminishing approximation methods, *On Numerical Approximation*, (R. E. Langer, ed.), Univ. of Wisconsin Press, 1959, 249～274.

[3] On spline functions, in *Inequalities* (O. Shisha, ed.), Academic Press, 1967, 255～291.

[4] Cardinal Spline Interpolation, CBMS Vol. 12, SIAM, 1973.

Schoenberg, I. J., ed.

Approximation Theory with Special Emphasis on Spline Functions, Academic Press, 1969.

Schultz, M. H.

Spline Analysis, Prentice-Hall, 1973. 中译本: 样条分析, 1979.

Schumaker, L. L.

Fitting surfaces to scattered data, *Approximation Theory* II, (G. G. Lorentz, ed.), Academic Press, 1976, 203～268.

Schweikert, D. G.

An interpolation curve using a spline in tension, J. Math. Phys. 45 (1966), 312～317.

Shamos, M. I.

Computational Geometry, Springer-Verlag, 1979.

Shephard, D.

A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data, Proc. 1964, ACM Nat. Conf., 517～524.

Shu, H., Hori, S., Mann, W. R., and Little, R. N.

The synthesis of sculptured surfaces, In *Numerical Control Programming Languages* (W. H. P. Leslie, ed.), North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

South, N. E., and Kelly, J. P.

Analytic surface methods, Ford Motor Company Report, December 1965.

Späth, H.

[1] Two-dimensional smooth interpolation, Computing 4 (1969), 178～182.

[2] Exponential spline interpolation, Computing 4 (1969), 225～233.

[3] Two-dimensional exponential splines, Computing **7** (1971), 178～182.
[4] *Spline Algorithms for Curves and Surfaces*, Utilitas Mathematics Publishing Inc., Winnipeg, Canada, 1974.

苏步青

[1] 高等几何讲义，上海科学技术出版社，1964.
[2] 关于三次参数样条曲线的一些注记，应用数学学报，1976年第1期，49～58.
[3] 关于三次参数样条曲线的一个定理，应用数学学报，1977年第1期，49～54.
[4] 关于五次有理曲线的注记，应用数学学报，1977年第2期，80～89.
[5] 有理整曲线的几个相对仿射不变量，复旦学报，自然科学版，1977年第2期，22～29.
[6] 几何外形设计理论及其应用(会议资料)，1978年3月.
[7] 计算几何的兴起，自然杂志 1 (1978)，409～412.
[8] 微分几何五讲，上海科学技术出版社，1979.

苏步青，华宣积

双圆弧逼近的拓广，复旦学报，自然科学版，1979年第4期.

苏步青，忻元龙

高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量，应用数学学报 3 (1980)，139～146.

苏步青，胡和生等

微分几何，人民教育出版社，1980.

孙家昶

[1] 样条函数及其在计算方法上的某些应用，计算机应用与应用数学，1974年第6期，1～22.
[2] 局部坐标下的样条函数与圆弧样条曲线，数学学报 20 (1977)，28～40.
[3] 局部坐标下三次样条的变分性质，应用数学学报 1 (1978)，115～122.
[4] 一般端点条件下三次插值样条的存在性与唯一性，计算数学，1978年第2期，1～9.

孙家昶，郑会琳

圆弧样条与双圆弧逼近，计算数学，1980.

Theilheimer, F., and Starkweather, W.

The fairing of ship line on a high-speed computer, Math. Comp., **15** (1961), 338～355.

Thomas, D. H.

Pseudospline interpolation for space curves, Math. Comp., 30 (1976),, 58～67

研野和人

自动设计法，コロナ社，1971,

Varah, J. M.

On the condition number of local bases for piecewise cubic polynomials, Math. Comp., 31 (1977), 37～44.

Veron, M., Ris, G., and Musse, J. P.

Continuity of biparametric surface patches, CAD 8 (1976), 267～273.

Versprille, K. J.

Computer aided design applications of the rational *B*-spline approximation form, Ph. D. Thesis, Syracuse University, 1975.

Walker, L. F.

Curved surfaces in shipbuilding design and production, In *Curved Surfaces in Engineering* (proc. Conference at Churchill College, Cambridge, 1972), IPC Science and Technology Press, 1972.

Walker, R. J.

Algebraic Curves, 1950.

中译本: 代数曲线,科学出版社, 1958.

Wilson, H. B., and Farrior, D. S.

Computation of geometrical and inertial properties for general areas and volumes of revolution, CAD 8 (1976), 257～263.

Wielinga, R. F.

Constrained interpolation using Bézier curves as a new tool in computer aided geometric design, CAGD, 1974, 153～172.

Wixom, J. A.

Interpolation to networks of curves in E^3, SIAM J. on Numer. Anal., 15 (1978).

王仁宏

多元齿结构与插值,数学学报 18 (1975), 91～106.

王日爽

三次样条的凸性条件和注记,计算数学 1 (1979), 336～341.

汪嘉业

一种保凸的 Spline 插值方法,计算数学 1 (1979), 233～243.

Woodford, C. H.

Smooth curve interpolation, BIT 9 (1969), 69～77.

Woodsford, P. A.

Mathematical methods in computer graphics——a survey, Gesellschaft für Informatike, V., Symposium on Computer Graphics, Berline, 1971.

Wu S. C., Abel, J. F., and Greenberg, D. P.

An interactive computer graphics approach to surface representation, Comm., ACM 10 (1977), 703～712.

忻元龙

［1］ 曲线的拟合和光顺,复旦学报,自然科学版, 1975 年第 2 期, 103～110.

［2］ 双三次样条函数及其在曲面光顺中的应用, 复旦学报, 自然科学版, 1977 63～68.

熊一奇,路见可,黄志远,杨文茂

[1] 一类跨界二阶连续的Coons曲面，武汉大学学报，1978年第2期，1~7.

[2] 关于网格光顺问题，武汉大学学报，1978年第3期，9~22.

熊振翔，李心灿，王日爽

曲线 曲面 光顺，国防工业出版社，1979.

Yamaguchi, F. (山口富士夫)

[1] A design system for free-form objects (FREEDOM), Technical Research Institute, Japan Society for the Promotion of Machine Industry, 1976.

[2] コンピユータデイスプレイによる自由曲面の一设计方式，精密机械 No. 1, 2, 9, 10 (1977).

山口，小西

自由曲面の设计方式，情报处理，1975.

柳生孝昭

计算机による曲线、曲面の处理，数理科学 10 (1974), 46~55.

芳田刚，小野博宣，田鸠太郎

大学教养コンピユータ图学，1976.

Zwart, P. B.

Multivariate splines with nondegenerate partitions, SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973), 665~673.